My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مموني مولاي اسماعيل

MATH PrEPaS

MP.

Probabilités II

Variable Aléatoires Réelles (VAR)

Programme Spé : Cas fini
Programme Spé : Cas discret

Difficulté: ****

Importance: *********

Nature : chapitre de concours

Objectifs

1. Montrer l'existence de E(X) et V(X) et calculer leurs valeurs
2. Se familiariser avec les VAR usuelles finies : uniforme et binomiale
3. Se familiariser avec les VAR usuelles discrètes infinies : géométrique et Poisson

2. Vocabulaire

VAR : fonction X : Ω → IR, qui associe à chaque événement A, un nombre réel x
X(Ω)={valeurs que peut prendre X}
VAR discrète finie : quand fini
Autrement dit : X prend un nombre fini de valeurs
VAR discrète infinie : quand X(Ω) prend un nombre infini de valeursun
MP : infini <=> X(Ω)= dénombrable
ECS : infini <=> IN ou IN*

Exemple 1
Expérience : On lance un dé :
X= VAR égale au numéro de la face apparue
X VAR discrète fini car X(Ω)=[|1,6|]
Exemple 2
Expérience : On tire des penalties jusqu'à en marquer une
X= VAR égale au nbr de tirs nécessaire pour marquer le 1er but.
X VAR discrète infini car X(Ω)=[|1,+∞[=IN*
Exemple 3 : souris amnésiques (voir probas 1)
On dispose de 20 souris
4 avec mémoire, 6 sans mémoire et 10 avec mémoire immédiate (se rappelle juste le dernier événement)
On dispose d'une chambre à 3 portes, dont deux avec une petite décharge électrique
On prend une souris au hasard, on s'intéresse au nombre d'essai possible pour qu'elle se dirige vers la bonne porte
X= VAR égale au nbr d'essais nécessaire pour une souris avec mémoire pour sortir
X VAR discrète infini car X(Ω)=[|1,2,3|]
Y= VAR égale au nbr d'essais nécessaire pour une souris sans mémoire pour sortir
Y VAR discrète infini car X(Ω)=[|1,+∞[=IN*

Z= VAR égale au nbr d'essais nécessaire pour une souris avec mémoire immédiate pour sortir
Y VAR discrète infini car X(Ω)=[|1,+∞[=IN*

Astuce 1
Pour trouver $X(\Omega)$ on cherche d'abord la valeur min de de X et sa valeur max

Exemple 1
On lance deux dès de couleurs différentes, l'un noir l'autre rouge.
$card(\Omega)=36$.
On pose $X=|$ Face noire – Face rouge $|$
min $X=0$ et max $X=5$,
donc $X(\Omega)=[|0,5|]$

On pose Y = Face noire + Face rouge
min $Y=1+1=2$ et max $Y=6+6=12$,
donc $Y(\Omega)=[|2,12|]$

Exemple 2
On lance deux dès de couleurs différentes, l'un noir l'autre rouge.
$card(\Omega)=36$.
On pose X= Face noire ^{2} + Face rouge ^{2}
min $X=2$ et max $X=72$,
donc $X(\Omega)=[|2,72|]$

Exemple 1
On lance deux dès de couleurs différentes, l'un noir l'autre rouge.
$card(\Omega)=36$.
On pose Y = Face noire + Face rouge,
min $Y=2$ et max $Y=12$,
donc $Y(\Omega)=[|2,12|]$

Astuce 2
$p(X=x)$ désigne la probabilité que X prend la valeur x
Pour calculer $p(X=x)$,

- on cherche d'abord l'événement A qui réalise la situation $X=x$
- on calcule $p(A)$
- on utilise la relation $p(X=x)=p(A)$

Exemple
On lance deux dès de couleurs différentes, l'un noir l'autre rouge.
card(Ω)=36.
On pose X= | Face noire – Face rouge |
$X(\Omega)=[|0,5|]$

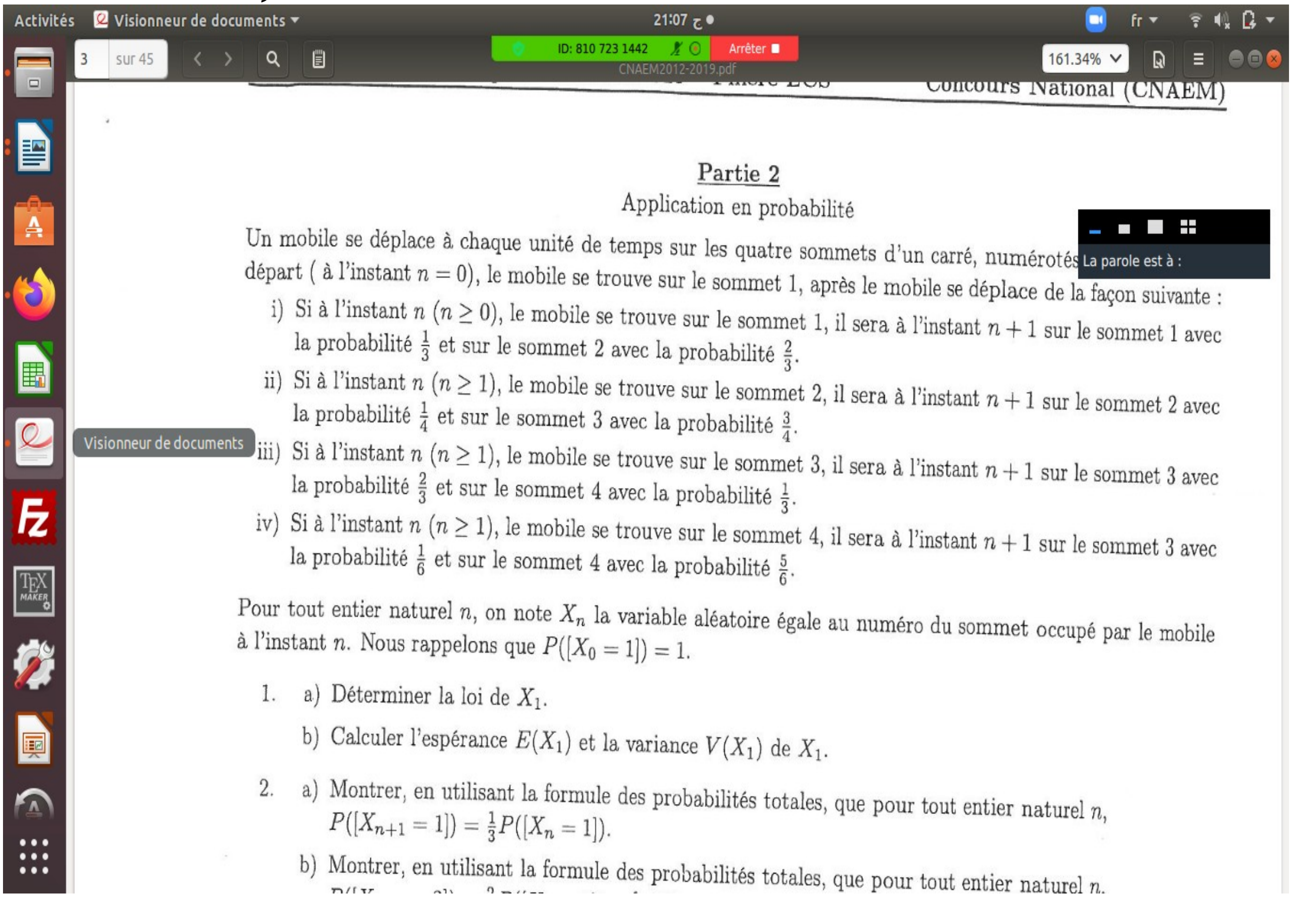
- Calculer p(X=0) ?
  $X=0 \iff A=\{(1,1), (2,2),(3,3),(4,4),(5,5), (6,6)\}$
  $p(X=0)=p(A)=6/36$
- Calculer p(X=5) ?
  $X=5 \iff A=\{(1,6), (6,1)\}$
  $p(X=5)=p(A)=2/36$
- Calculer p(X=4) ?
  $X=4 \iff A=\{(1,5), (5,1), (2,6),(6,2),\}$
  $p(X=4)=p(A)=4/36$
- Calculer p(X=3) ?
  $X=3 \iff A=\{(1,4), (4,1), (2,5),(5,2),(3,6),(6,3)\}$
  $p(X=3)=p(A)=6/36$
- $X=2 \iff A=\{(1,3), (3,1), (2,4),(4,2),(3,5),(5,3), (4,6),(6,4)\}$
  $p(X=2)=p(A)=8/36$

Théorème 1 : fondamental
Si X est une VAR
Alors

- $(X=x)_{x \text{ in } \Omega}$ est un système complet d'événements
- $\sum_{x \text{ in } \Omega} p(X=x)=1$
- $p(A)=\sum_{x \text{ in } \Omega} p_{X=x}(A)p(X=x)$ probabilité totale (version VAR)

Exemple
On lance deux dès de couleurs différentes, l'un noir l'autre rouge.
On pose X= | Face noire – Face rouge |
$X(\Omega)=[|0,5|]$
Système complet: {X=0, X=1, X=2, X=3, X=4, X=5}
$p(X=0)+ p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)+ p(X=5)=1$
$p(X=1)=1 - [p(X=0)+p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)+ p(X=5)]$

CNAEM 2019, ECS



Concours National (CNAEM)

Partie 2

Application en probabilité

Un mobile se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets d'un carré, numérotés [...] départ (à l'instant $n = 0$), le mobile se trouve sur le sommet 1, après le mobile se déplace de la façon suivante :

i) Si à l'instant n ($n \geq 0$), le mobile se trouve sur le sommet 1, il sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

ii) Si à l'instant n ($n \geq 1$), le mobile se trouve sur le sommet 2, il sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

iii) Si à l'instant n ($n \geq 1$), le mobile se trouve sur le sommet 3, il sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

iv) Si à l'instant n ($n \geq 1$), le mobile se trouve sur le sommet 4, il sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{6}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{5}{6}$.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet occupé par le mobile à l'instant n. Nous rappelons que $P([X_0 = 1]) = 1$.

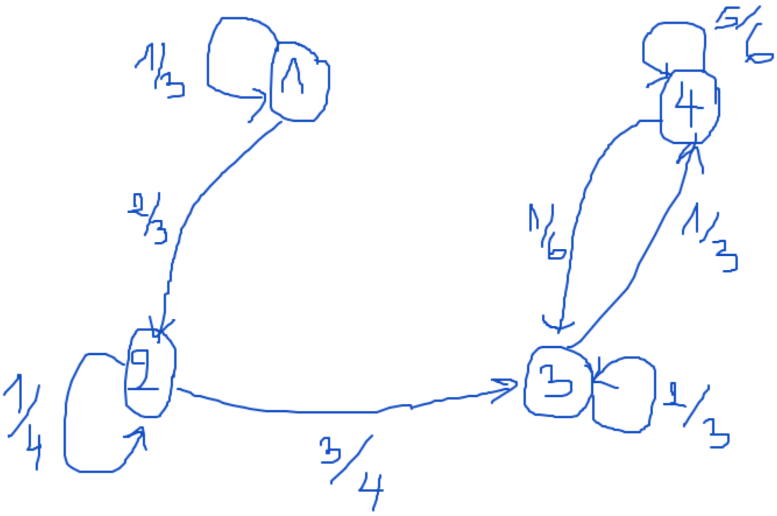
1. a) Déterminer la loi de X_1.

   b) Calculer l'espérance $E(X_1)$ et la variance $V(X_1)$ de X_1.

2. a) Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que pour tout entier naturel n, $P([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3}P([X_n = 1])$.

   b) Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que pour tout entier naturel n.

X_n= la position du mobile à l'instant n



$p_{X_n=1}(X_{n+1}=1)=1/3$, $p_{X_n=2}(X_{n+1}=1)=0$, $p_{X_n=3}(X_{n+1}=1)=0$, $p_{X_n=4}(X_{n+1}=1)=0$

$p_{X_n=1}(X_{n+1}=2)=2/3$, $p_{X_n=2}(X_{n+1}=2)=1/4$, $p_{X_n=3}(X_{n+1}=2)=0$, $p_{X_n=4}(X_{n+1}=2)=0$

$X_{n+1}= 1$: événement qui se réalise à l'instant n+1, pour calculer sa probabilité il faut considérer comme système complet tous les cas possibles à l'instant n, qui sont : $X_n= 1$, $X_n= 2$, $X_n= 3$, $X_n= 4$
la formule des probabilités totales s'écrit

$p(X_{n+1}= 1) =p_{X_n= 1}(X_{n+1}=1)\ p(X_n= 1)+ p_{X_n= 2}(X_{n+1}=1)\ p(X_n= 2) + p_{X_n= 3}(X_{n+1}=1)\ p(X_n= 3)+p_{X_n=4}(X_{n+1}=1)\ p(X_n=4) =(1/3).\ p(X_n= 1)$

$X_{n+1}= 2$: événement qui se réalise à l'instant n+1, pour calculer sa probabilité il faut considérer comme système complet tous les cas possibles à l'instant n, qui sont : $X_n= 1$, $X_n= 2$, $X_n= 3$, $X_n= 4$
la formule des probabilités totales s'écrit

$p(X_{n+1}= 2) =p_{X_n= 1}(X_{n+1}=2)\ p(X_n=1)+p_{X_n= 2}(X_{n+1}=2)\ p(X_n= 2)$
$p_{X_n=3}(X_{n+1}=2)\ p(X_n= 3)+p_{X_n=4}(X_{n+1}=2)p(X_n=4)=(2/3).p(X_n=1)+ (1/4)p(X_n=2)$

Définition 1 : cas fini
La loi de X, dans le cas VAR fini est le tableau suivant

$X(\Omega)$	Les valeurs de X
$p(X=x)$	Leurs probas

Exemple
On lance deux dès de couleurs différentes, l'un noir l'autre rouge.
$card(\Omega)=36$. On pose X= | Face noire – Face rouge |

$X(\Omega)$	0	1	2	3	4	5
$p(X=x)$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

Définition 2 : VAR discrète infini
Il faut préciser :

- $X(\Omega)$
- $p(X=x) \quad \forall\, x \in \Omega$

Exemple
On tire des penalties jusqu'à en marquer une
X= nbr d'essais nécessaires pour marquer le 1er but.
$X(\Omega)=[|1,+\infty[=IN^*$, donc VAR discrète infini
On suppose que la probabilité de marquer un but=1/3 (un vent qui souffle)
On suppose que les conditions de chaque tirs sont indépendamment

- $X(\Omega)=IN^*$
- Pour tout $n \in X(\Omega)=IN^*$
- $p(X=1)$=probabilité de marquer au 1er essai =1/3
- $p(X=2)$=probabilité de marquer au 2er essai =p(rater puis marquer)=$(2/3)(1/3)$
- $p(X=3)$=p(rater puis rater puis marquer)=$(2/3)^2(1/3)$
- $p(X=n)$ p(rater n-1 fois puis marquer) = $(2/3)^{n-1}(1/3)$

Astuce 3:
Pour montrer que la loi de X est bien définie, il faut montrer que

1. la série $\sum p(X=x_k)$ converge
2. la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} p(X=x_k)=1$

Exemple
$X(\Omega)=IN^*$ et $p(X=n)=(2/3)^{n-1}\, 1/3$

1. la série $\sum(2/3)^{n-1}\,(1/3)$ converge car géométrique de raison $|2/3|<1$
2. $S=\sum_{n=1}^{+\infty}(2/3)^{n-1}1/3= 1/3.\sum_{n=0}^{+\infty}(2/3)^{n} = 1/3\, .[1/(1-2/3)]=1/3.3=1$

   Donc la loi de X est bien définie

2. Espérance

Définition

$$E(X)=\Sigma x_k p(X=x_k)=\Sigma \text{valeur x probas}$$

Exemple :

$X(\Omega)$	1	1/2	-1	1/4
$p(X=x)$	1/6	1/6	1/3	1/3

$E(X)=1 .1/6+1/2 . 1/6 + -1.1/3 + 1/4 . 1/3=0$

Interprétation

E(X) est un moyenne pondérée

E(X) interprète la moyenne des valeurs qu'on peut espérer avoir si l'on répète l'expérience plusieurs fois

Exemple

On lance un dè une fois card(Ω)=6.

X=numéro obtenu

$X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$p(X=x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$E(X)=1.1/6 + 2.2/6+ ...+ 6.1/6 = 7/2= 3,5$

Si on lance le dé un nbr qlq de fois et si on calcule la moyenne des valeurs obtenues dans chaque lancer

Alors La valeur moyenne qu'on peut espérer est 3,5

Dans un jeu de dé, il est conseillé de miser sur 3 ou 4

Exemple 2

On lance deux dès de couleurs différentes, l'un noir l'autre rouge.

card(Ω)=36. On pose X= | Face noire – Face rouge |

$X(\Omega)$	0	1	2	3	4	5
$p(X=x)$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

$E(X)=35/18$

Astuce 4 :
Dans le cas discret infini.
Pour montrer que l'espérance de X est bien défini, il faut montrer que

la série $\Sigma\ x_k\, p(X=x_k)$ converge

Dans ce cas, on pose

$$E(X)=\Sigma_{k=0}^{+\infty} x_k\, p(X=x_k)$$

Exemple

$X(\Omega)=IN^*$ et $p(X=n)=(2/3)^{n-1}1/3$

$\Sigma_{n=1}^{\infty}\, n.x^{n-1} = 1/(1-x)^2$

$E(X)=\Sigma_{n=1}^{\infty}\, n(2/3)^{n-1}1/3 = 1/3.\ \Sigma_{n=1}^{\infty}\, n(2/3)^{n-1} =1/3\ .1/(1-x)^2$ où $x=2/3$
$E(X)=1/3.9=3$

Théorème 2 : Formules clés (à apprendre)

- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- Si $X=b=cte$, alors $E(X)=b$
- $E(aX+b)=a.E(X)+b$
- $X\geq 0 \Rightarrow E(X)\geq 0$

Demo

- $X=b \Rightarrow x_k=b \Rightarrow E(X)=\Sigma x_k p(X=x_k)=\Sigma b.\ p(X=x_k)=b.\ \Sigma p(X=x_k)=b$
- $X\geq 0 \Rightarrow x_k \geq 0 \Rightarrow E(X)\ \Sigma x_k p(X=x_k) \geq 0$

Remarque

- $E(XY) \neq E(X).E(Y)$

Théorème fondamental (Théorème de transfert) : MP
Si X VAR discrète et f fonction qlq, alors

$$E(f(X))=\sum f(x_k)p(X=x_k)$$

Demo : Admise

Astuce MP
Quand on applique un changement de VAR dans l'espérance, il faut appliquer ce changement uniquement sur les valeur de X sans modifier leurs probas

Exemple

$E(X)=\sum x_k p(X=x_k)$

$E(X^2)=\sum x_k^2 \,.\, p(X^2=x_k^2)=\sum x_k^2 \,.\, p(X=x_k)$

$E(\cos X)=\sum \cos\, x_k.\ p(\cos X=\cos\, x_k) =\sum \cos\, x_k.\ p(X=x_k)$

$E(e^X) = \sum e^{xk} p(X=x_k)$

$E(1/X) = \sum\ 1/x^k\, p(X=x_k)$

3. Variance et Ecart-type

Définition

- **Variance** : $V(X)=E\left[(X-E(X))^2\right] \geq 0$
- **Écart-type** : $\sigma(X)=V(X)^{1/2}$

Interprétation

Posons $Y=(X - E(X))^2$: Écart entre les valeur de X et leur moyenne

$V(X)=$ moyenne (des écarts ^{2})

Elle mesure la répartition des valeurs d'une VAR autour de leur moyenne

V(X) petit signifie : les valeurs de X sont proches de leur moyenne

Théorème 1 : Formules clés (à apprendre)

- $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ (Formule de Koening-Hyghens)
- $V(cte)=0$
- $V(a.X+b)=a^2\,V(X)$

Demo

- Posons $b=E(X)$

  $V(X)=E\left[(X-E(X))^2\right] = E[(X-b)^2] = E(X^2-2bX+b^2)$

  $=E(X^2)-2bE(X)+b^2 = E(X^2)-2b^2+b^2 = E(X^2)-b^2 = E(X^2)-E(X)^2$
- $X=b \Rightarrow E(X)=b$ et $X^2=b^2$, donc $E(X^2)=b^2$, donc $V(X)=0$
- $V(a.X+b) = E\left[(aX+b-E(aX+b))^2\right] = E\left[(aX+b-aE(X)-b)^2\right]$

  $= E\left[a^2(X-E(X))^2\right] = a^2\,E\left[(X-E(X))^2\right] = a^2\,V(X)$

Astuce

Pour calculer V(X)

- On calcule E(X) avec la formule

  $$E(X)=\Sigma x_k p(X=x_k)=\Sigma(\text{valeurs}).(\text{probas})$$
- On calcule $E(X^2)$ avec la formule

  $$E(X)=\Sigma x_k{}^2 p(X=x_k)=\Sigma(\text{valeur})^2.\ (\text{probas})$$
- On appliquer la Formule de Koening-Hyghens

  $$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

Exemple :

X(Ω)	1	1/2	-1	1/4
p(X=x)	1/6	1/6	1/3	1/3

$E(X)=0$
$E(X^2)=1^2\ .1/6+(1/2)^2\ .\ 1/6+(-1)^2\ .1/3+(1/4)^2 .\ 1/3=9/16$
$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=9/16$
$\sigma(X)=3/4$

Remarque

- $V(cte)=0$
- $V(X+Y)\neq V(X)+V(Y)$

Astuce 6 :
Pour montrer que la variance de X est bien défini, il faut montrer que

1. la série $\Sigma\ x_k\, p(X=x_k)$ converge, cad l'espérance est bien définie
2. la série $\Sigma\ x_k^2\, p(X=x_k)$ converge

Dans ce cas, on pose $E(X^2)=\Sigma_{k=0}^{+\infty} x_k^2\, p(X=x_k)$ et $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$

Extrait ECS : $X(\Omega)=IN^*$, $p(x=n)=1/n(n+1)$. Ici $x_k=n$

1. Mq la loi de X est bien définie
2. Son espérance est elle bien définie, si oui calculer E(X)
3. Sa variance est elle bien définie, si oui calculer V(X)

Solution

1. $p(x=n)=1/n(n+1)=1/(n^2+n)\sim 1/n^2$ dont la série converge, car Riemann de paramètre $\alpha=2>1$.

D'autre part, $S=\Sigma_{n=1}^{+\infty} p(x=n)=\Sigma_{n=1}^{+\infty} 1/n(n+1)=\Sigma_{n=1}^{+\infty}\left[1/n-1/(n+1)\right]$
$=\lim \Sigma_{k=1}^{n}\left[1/k-1/(k+1)\right]=\lim\left[1-1/(n+1)\right]$

2. Ici $\Sigma\ x_k\, p(X=x_k)=\Sigma\ n\, p(X=n)=\Sigma\ n\,.1/n(n+1)=\Sigma\ 1/(n+1)$.

Or $1/(n+1)\sim 1/n$ dont la série diverge, car Riemann de paramètre $\alpha=1\leq 1$.
Ainsi, l'espérance de X n'est pas bien définie.

3. Comme l'espérance de X n'est pas bien définie, alors sa variance ne l'est pas aussi

Exercice (Extrait Concours ECS) : $X(\Omega)=IN^*$, $p(x=n)=\lambda/n(n+1)(n+2)$.

1. Mq la série Σ $1/n(n+1)(n+2)$ converge
2. Trouver a,b,c tq $1/n(n+1)(n+2)=a/n+ b/(n+1)+c/(n+2)$
3. Calculer sa somme S
4. Trouver λ pour que la loi de X soit bien définie
5. Son espérance est elle bien définie, si oui calculer E(X)
6. Sa variance est elle bien définie, si oui calculer V(X)

Solution

1. $1/n(n+1)(n+2)=1/(n^2+n)(n+2)=1/ (n^3+3n^2+2n) \sim 1/n^3$, donc la série converge car Riemann de paramètre $\alpha=3>1$.
2. $a/n+b/(n+1)+c/(n+2)$
   $=[a(n+1)(n+2)+bn(n+2)+cn(n+1)] / [n(n+1)n+2)]$
   $=[an^2+3an+2a+bn^2+2bn+cn^2+cn] / [n(n+1)(n+2)]$
   $=[n^2 (a+b+c)+ n(3a+2b+c)+2a] / [n(n+1)(n+2)]$
   Or $a/n+b/(n+1)+c/(n+2)=1/n(n+1)(n+2)$, donc
   $1/n(n+1)(n+2)=[n^2 (a+b+c)+ n(3a+2b+c)+2a] / [n(n+1)(n+2)]$
   Par identification, on obtient $1= n^2 (a+b+c)+ n(3a+2b+c)+2a$
   cad $0.n^2 +0.n+1= n^2 (a+b+c)+ n(3a+2b+c)+2a$

Donc (1) : $a+b+c=0$, (2) : $3a+2b+c=0$, (3) : $2a=1$
(3) => $a=1/2$, (2)-(1) => $2a+b=0$ => $b=-2a=-1$ et (1)=>$c=-a-b=1/2$.

3. $S=\Sigma_{n=1}^{+\infty} [1/2n-1/(n+1)+1/2(n+2)]=$

$=1/2 [\Sigma_{n=1}^{+\infty} [1/n-2/(n+1)+1/(n+2)]]$

$=1/2 [\Sigma_{n=1}^{+\infty} [1/n-1/(n+1)-1/(n+1)+1/(n+2)]]$

$=1/2 [\Sigma_{n=1}^{+\infty} [1/n-1/(n+1)] + 1/2 [\Sigma_{n=1}^{+\infty}-1/(n+1)+1/(n+2)]]$

$=1/2 [\Sigma_{n=1}^{+\infty} [1/n-1/(n+1)] + 1/2 [\Sigma_{n=1}^{+\infty}1/(n+2)-1/(n+1)]]$

$=1/2 .\lim [\Sigma_{k=1}^{n} [1/k-1/(k+1)] + 1/2. \lim [\Sigma_{k=1}^{n}1/(k+2)-1/(k+1)]]$

$=1/2 [\lim 1/-1/(n+1)] + 1/2. \lim [1/(n+2)-1/2]=1/2-1/4=1/4$

4. la loi de X soit bien définie <=> $\Sigma_{n=1}^{+\infty}p(x=n) =1$

<=> $\Sigma_{n=1}^{+\infty}\lambda/n(n+1)(n+2) =1$ <=> $\lambda \Sigma_{n=1}^{+\infty}1/n(n+1)(n+2) =1$
<=> $\lambda S=1$ <=> $\lambda/4=1$ <=> $\lambda=4$

5. l’espérance est elle bien définie <=> $\Sigma np(x=n) = \Sigma \lambda/(n+1)(n+2)$ cvge
Or $1/(n+1)(n+2) \sim 1/n^2$, donc la série converge car Riemann de paramètre $\alpha=2>1$. Avec $E(X)=\Sigma_{n=1}^{+\infty} np(x=n)=\Sigma_{n=1}^{+\infty}\lambda/(n+1)(n+2)$
$=\lambda\ \Sigma_{n=1}^{+\infty} 1/(n+1)(n+2) = \lambda\ \Sigma_{n=1}^{+\infty} 1/(n+1) -1/(n+2)$
$= \lambda \lim \Sigma_{k=1}^{n} 1/(k+1) -1/(k+2) = \lambda \lim (1/2- 1/n+2)= \lambda/2=2$ car $\lambda=4$
6. Comme l’espérance est elle bien définie, alors la variance est bien définie <=> $\Sigma n^2p(x=n) = \Sigma\lambda n/(n+1)(n+2)$ cvge or $\lambda n/(n+1)(n+2)\sim 1/n$ donc la série diverge car Riemann de paramètre $\alpha=1$. Ainsi la variance n’est pas bien définie

4. VAR discrètes finies usuelles

Loi uniforme

Contexte :

on effectue une expériences et on trouve n valeurs : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ possibles qui sont équiprobables (même probabilité)

Notation : $X \to U\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Loi de X : $X(\Omega)=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$p(X=x_k)=1/n$

Espérance : $E(X)=\left(\Sigma\ x_k\right) / n$

Variance : $V(X)= \left(\Sigma\ x_k^{\ 2}\right)/n - \left[\left(\Sigma\ x_k\right)/n\right]^2$

Cas spécial : $X \to U\{1,2,\ldots,n\}$

$$E(X)=(n+1)/2$$
$$V(X)=(n^2-1)/12$$

Justification

$E(X)=\left(\Sigma_{k=1}^{\ n}\ k\right)/n = n.(n+1)/2.n = (n+1)/2$

$E(X^2)=\left(\Sigma_{k=1}^{\ n}\ k^2\right)/n = n.(n+1)(2n+1)/6.n = (n+1)(2n+1)/6$

$V(X)=E(X^2) - E(X)^2 = (n+1)(2n+1)/6 - (n+1)^2/4 = (n^2-1)/12$

Loi binomiale

Contexte :

on effectue n expériences identiques, successives et indépendantes, dont chacune d'elles n'as que deux issues : succès ou échec et tel que p(succès)=Cte=p

Notation : **B(n,p) de paramètre n et p**

Loi de X :

X s'intéresse au nombre de succès parmi n essai

min X=0 succès, et max X=n succès, $X(\Omega)=[|0,n|]$

X=k signifie on a obtenu exactement k succès parmi n

p(X=k) calcule la probabilité d'avoir exactement k succès parmi n

$$\mathbf{p(X=k)=C^k_n p^k(1-p)^{n-k}}$$

Espérance : **$E(X)=np$**

Variance : **$V(X))=npq$ où $q=1-p$**

Demo : En exercice

5. VAR Usuelles discrètes infinies

Loi géométrique

- **Contexte** : on effectue un nombre expériences (dont on ne connaît pas au départ le nombre). Les expériences sont identiques, successives et indépendantes, dont chacune d'elles n'as que deux issues : sucés ou échec et tel que **p(succès)=Cte=p**
- **Notation** : G(p)
- **Loi de X :**
  - X s'intéresse au nombre d'essais nécessaire pour avoir le premier succès.
  - valeur min X=1, et valeur max X=+∞
  - $X(\Omega)=[|1,+\infty[=IN^*$
  - X=k signifie on a obtenu le 1er succès au k essai, cad (k-1) échec et 1 succès
  - p(X=k) calcule la probabilité le premier sucés après (k-1) échec
  - $\mathbf{p(X=k)=p(1-p)^{k-1}}$
- **Espérance** : **E(X)=1/p**

- **Variance : $\mathbf{V(X))=(1-p)/p^2}$**

Démo : $E(X)=\sum x_k\, p(X=x_k)=\sum_{k=1}^{+\infty} k\, p(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty} k\, p(1-p)^{k-1}$

Posons x=(1-p), donc $E(X)= \sum_{k=1}^{+\infty} k\, px^{k-1}= p\sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k-1}=p.\ 1/(1-x)^2$.

Donc $E(x)=p/(1-1+p)^2 =1/p$

Démo : $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$.

Or $E(X^2)=\sum_{k=0}^{+\infty}x_k^2\, p(X=x_k)=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\, p(1-p)^{k-1}= p\ \sum_{k=0}^{+\infty}k^2(1-p)^{k-1}$.

Posons x=1-p, donc $E(X^2)= p\ \sum_{k=0}^{+\infty}k^2x^{k-1} = p\ \sum_{k=0}^{+\infty} (k^2-k+k)x^{k-1}$

$=p\ \sum_{k=0}^{+\infty} [(k^2-k)x^{k-1}+kx^{k-1}]=p\ [\sum_{k=0}^{+\infty} (k^2-k)x^{k-1}+\sum_{k=0}^{+\infty}kx^{k-1}]$

$=px.\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}+p\sum_{k=0}^{+\infty}kx^{k-1}=p.x.\ 2/(1-x)^3\ + E(X)=2p(1-p)/p^3+1/p$

Donc $E(X^2)=2(1-p)/p^2+1/p=2/p^2-2/p+1/p= 2/p^2-1/p=(2-p)/p^2$.

Ainsi $V(X)= E(X^2)-E(X)^2=(2-p)/p^2-1/p^2=(1-p)/p^2$

Loi de Poisson

- **Contexte** : Hors programme
- **Notation** : P(λ)
- **Loi de X :**
  - $X(\Omega)=[|1,+\infty[=IN^*$
  - $\mathbf{p(X=k)=e^{-\lambda}\ \lambda^k / k\ !}$
- **Espérance** : **E(X)=V(X)=λ**

Exercice : **Souris amnésiques**
On dispose de 20 souris
4 avec mémoire, 6 sans mémoire et 10 avec mémoire immédiate (se rappelle juste le dernier événement)
On dispose d'une chambre à 3 portes, dont deux avec une petite décharge électrique
Partie I :
On prend une souris au hasard, on s'intéresse au nombre d'essai possible pour qu'elle se dirige vers la bonne porte

1. Nature de la loi pour chaque type de souris
2. Montrer que ces différentes lois sont bien définies
3. Pour chaque loi, donner l'espérance et son interprétation
4. On prend une souris au hasard
   Quelle la probas qu'elle sort après exactement deux essais
5. On prend une souris au hasard à sa sortie de la chambre lors du 2ème essai
   Quelle la probas qu'elle soit sans mémoire

Solution
$X=k$ signifie que la souris va sortir au $k^{ème}$ essai aprés (k-1) echec
S_k=succés au k ^{eme} essai
E_k = echecc au k ^{eme} essai
$X=k$ signifie $E_1\ E_2\ ...E_{k-1}\ S_k$

1. **M = Avec mémoir**e
   le succès ou échec dans un essai influence l'essai suivant
   Ne peut pas être géométrique
   $X(\Omega)=\{1,2,3\}$
   $p(X=1)=1/3$, $p(X=2)=p(E_1 S_2) = p(E_1)p_{E1}(S_2)=(2/3).(1/2)=1/3$
   $p(X=2)=1/3$
   Donc X est uniforme, donc $p_M(X=k)=1/3$
   S = Sans mémoire
   $X(\Omega)=IN^*$
   le succès ou échec dans un essai n'influence pas l'essai suivant
   Donc X est géométrique ici de paramètre $p=p(\text{succès})=1/3$
   $p_S(X=k)=(1/3)(2/3)^{k-1}$

C =Avec mémoire courte
le succès ou échec dans un essai influence l'essai suivant
Ne peut pas être géométrique
$X(\Omega)=IN^*$
$p(X=1)=1/3$, $p(X=2)=p(E_1 S_2) = p(E_1)p_{E1}(S_2)=(2/3).(1/2)=1/3$
$p(X=3)=p(E_1 E_2 S_3) = p(E_1)p_{E1}(E_2)p_{E1\,E2}(S_3)=p(E_1)p_{E1}(E_2)p_{E2}(S_3)=(2/3).(1/2)(1/2)$
$p_C(X=k)=p(E_1 E_2 \ldots E_{k-1} S_k) = p(E_1)p_{E1}(E_2)p_{E2}(E_3)\ldots.p_{Ek-2}(E_{k-1})p_{Ek-1}(S_k)$
$=2/3.\ 1/2.\ \ldots.1/2 =(1/3)\ (1/2)^{k-2}$

2. X_M uniforme donc bien définie
   X_S géométrique, donc bien définie
   X_C : $p(X_c=k) = (1/3)\ (1/2)^{k-2}$ pour $k\geq 2$ et $p(X=1)=1/3$
   $\sum_{k=1}^{\infty} p(X_c=k) = 1/3 + \sum_{k=2}^{\infty}(1/3)\ (1/2)^{k-2} = 1/3 +(1/3)\sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k$

   $1/3 + (1/3)\ [1/\ (1-1/2)\ ] = 1/3 + 2/3 = 1$
3. X_M uniforme donc $E(X)=(1+2+3)/3 = 2$
   Interprétation : les souris avec mémoire vont sortir après deux essais en moyenne
   X_S géométrique de paramètre 1/3, donc $E(X)=3$
   Interprétation : les souris sans mémoire vont sortir après trois essais en moyenne
   X_C : $p(X_c=k) = (1/3)\ (1/2)^{k-2}$ pour $k\geq 2$ et $p(X=1)=1/3$
   $\sum_{k=1}^{\infty} k.p(X_c=k) = 1/3 + \sum_{k=2}^{\infty}(1/3)\ k(1/2)^{k-2}$
   $= 1/3 +(2/3)\sum_{k=2}^{\infty} k(1/2)^{k-1}$ car $(1/2)^{-1} = 2$
   $=1/3 + (2/3)\left[\sum_{k=1}^{\infty} k(1/2)^{k-1} - 1\right]$
   $=1/3 + (2/3)\left[1/(1-1/2)^2 - 1\right]$
   $=1/3 + 2/3\ [4-1\ ] =2,33$
4. $p(X=2)=p_M(X=2)p(M)+p_C(X=2)p(C)+p_S(X=2)p(S)$
   $=(1/3)(4/20) + (1/3)(10/20) + (1/3)(2/3)(6/20)= \ldots$
5. $p_{X=2}(S)=p[(X=2) \cap S\ ] / p(X=2) = p_S(X=2).p(S) / p(X=2)$