Résumé de Cours

Couples et suites de VAR discrètes

I Couple de VAR discrètes

Dans toute cette partie X et Y désigneront deux VAR discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On notera $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j / j \in J\}$ où I et J désignent $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou une de leurs parties finies.

1 Loi d'un couple

Définition 1
On appelle **couple de VAR discrète** et on note (X, Y) toute application de Ω dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$.

Définition 2
On appelle **loi du couple de VAR discrètes** (X, Y), ou encore **loi conjointe des variables aléatoires X et Y**, l'ensemble des couples $((x_i, y_j), p_{i,j})$ où

$$x_i \in X(\Omega), \quad y_j \in Y(\Omega), \quad p_{i,j} = P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

2 Lois marginales

Définition 3
Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes. La loi de X est appelé la **première loi marginale du couple (X, Y)** et la loi de Y est appelée la **deuxième loi marginale du couple (X, Y)**.

Lorsque l'on connait la loi du couple (X, Y) on peut en déduire la loi de X et la loi de Y grâce à la formule des probabilités totales :

Propriété 1
Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes. Alors on a :

$$\forall i \in I, \quad P([X = x_i]) = \sum_{j \in J} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

$$\forall j \in J, \quad P([Y = y_i]) = \sum_{i \in I} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

Remarque :
Ce qu'il est important de retenir ici, c'est que lorsqu'on a la loi d'un couple pour obtenir la loi de X (ou celle de Y) il suffit de se servir de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y = y_j])_{j \in J}$ (ou $([X = x_i])_{i \in I}$)

3 *Lois conditionnelles*

Définition 4
Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes et soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$.
On appelle **loi conditionnelle à** $[Y = y]$ **de** X l'ensemble des couples $(x_i, P_{[Y=y]}(X = x_i))$ pour $i \in I$.
On définit de même pour $x \in X(\Omega)$ la **loi conditionnelle à** $[X = x]$ **de** Y**.**

Il est important de bien savoir jongler entre loi du couple, loi marginale et loi conditionnelle. Il s'agit uniquement d'appliquer la définition des probabilités conditionnelles ou alors d'appliquer la formule des probabilités totales mais voici tout de même une propriété générale qui reprend tout cela.

Propriété 2
Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes. Pour tout $(i, j) \in I \times J$ tels que $P(X = x_i) \neq 0$ et $P(Y = y_i) \neq 0$ on a :

- Loi conditionnelle à partir de la loi du couple :

$$P_{[X=x_i]}(Y = y_j) = \frac{P([X = x_i] \cap [Y = y_j])}{P(X = x_i)}$$
$$P_{[Y=y_j]}(X = x_i) = \frac{P([X = x_i] \cap [Y = y_j])}{P(Y = y_j)}$$

- Loi du couple à partir de la loi conditionnelle :

$$P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P(X = x_i)P_{[X=x_i]}(Y = y_j)$$
$$P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P(Y = y_j)P_{[Y=y_j]}(X = x_i)$$

- Lois marginales à partir de la loi du couple :

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$
$$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

- Lois marginales à partir des lois conditionnelles :

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(Y = y_j)P_{[Y=y_j]}(X = x_i)$$
$$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i)P_{[X=x_i]}(Y = y_j)$$

II Indépendance de VAR discrètes

1 *Deux variables*

Définition 5
On dit que deux VAR discrètes X et Y sont **indépendantes** si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y)$$

Propriété 3
Si X et Y sont indépendantes on a aussi $P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant y)$

Propriété 4
Si X et Y sont deux VAR indépendante et si f et g sont deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2 *n variables*

Définition 6
Soient $X_1, ..., X_n$ n VAR discrètes. On dit que les variables $X_1, ..., X_n$ sont **mutuellement indépendantes** (ou tout simplement **indépendantes**) lorsque
pour tout $(x_1, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:

$$P([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]) = P(X_1 = x_1) \times \cdots \times P(X_n = x_n)$$

Propriété 5
Soient $X_1, \cdots, X_n$ n VAR discrètes mutuellement indépendantes et soit $p \in \{2, ..., n-1\}$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{p+1}, \cdots, X_n$.

Exemple 6:
Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 5 VAR discrètes mutuellement indépendantes alors les variables $X_1 + 2X_3^2$ et $X_2 - e^{X_5}$ sont indépendantes.

3 *Une suite de variables*

Définition 7
On dit que la suite de VAR discrète $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes** si pour tout $n \in \mathbb{N}$ les variables aléatoires $X_0, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

III Fonction de deux VAR discrètes

Dans cette partie g désigne une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie au moins sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
On considère alors la variable aléatoire $Z = g(X, Y)$

1 *Loi de probabilité de Z*

L'ensemble des valeurs prises par Z sont les $g(x_i, y_j)$ avec $(i, j) \in I \times J$. Mais il se peut que certaines des valeurs des $g(x_i, y_j)$ soient égales.
On note alors $Z(\Omega) = \{z_k / k \in K\}$.

Propriété 6
Soit $Z = g(X, Y)$. Alors on a :

$$P(Z = z_k) = \sum_{(i,j)/g(x_i,y_j)=z_k} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

2 Espérance

Si on a calculé la loi de $Z = g(X,Y)$ alors on peut calculer l'espérance de façon classique mais si on n'a pas déterminé clairement la loi de Z alors le théorème suivant peut aider...

Théorème 1
Théorème de Transfert

$$E(g(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)P([X=x]\cap[Y=y])$$

Remarque :
Il faut donc connaitre la loi du couple (X,Y) pour utiliser ce théorème.

3 Produit de VAR discrètes

Propriété 7
- $E(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP([X=x]\cap[Y=y])$
- Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

Attention la réciproque à la deuxième phrase est fausse.
Ce n'est pas parce que $E(XY) = E(X)E(Y)$ que les VAR sont indépendantes.

4 Covariance et coefficient de corrélation linéaire

Définition 8
Soient X et Y deux VAR discrètes admettant une espérance. On appelle **covariance de X et de Y** le nombre réel $\mathrm{cov}(X,Y) = E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]$, s'il existe.

Théorème 2
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors la covariance de X et de Y existe et on a

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

C'est ce théorème que l'on utilisera le plus souvent pour calculer la covariance.

Remarque :
$\mathrm{cov}(Y,X) = \mathrm{cov}(X,Y)$ et on a aussi $\mathrm{cov}(X,X) = V(X)$.

Corollaire 1
Si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

Attention ce n'est pas parce que $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ que X et Y sont nécessairement indépendantes. Par contre si $\mathrm{cov}(X,Y) \neq 0$, on peut affirmer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition 9
Si X et Y sont deux variables aléatoires telles que $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$, on dit que les variables sont **non corrélées**.

Remarque :
Deux VAR indépendantes sont non corrélées mais la réciproque est en générale fausse.

Propriété 8
Soient X, X', Y et Y' quatre VAR discrètes admettant des moment d'ordre 2 et a, b deux réels. On a

$$\mathrm{cov}(aX + bX', Y) = a\mathrm{cov}(X, Y) + b\mathrm{cov}(X', Y)$$

$$\mathrm{cov}(X, aY + bY') = a\mathrm{cov}(X, Y) + b\mathrm{cov}(X, Y')$$

Il est important de penser à ce résultat pour simplifier les calculs de covariance qui peuvent parfois être pénibles.

Définition 10
Soient X et Y deux VAR discrètes d'écart type non nul. On appelle **coefficient de corrélation linéaire de X et Y** le réel :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Interprétation :
Ce nombre est un réel compris entre -1 et 1 qui compare les similarités entre les lois de X et de Y.
Il est égal à 1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable et il est égal à -1 dans le cas où la fonction affine est décroissante.
Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables. Plus le coefficient est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les variables est forte ; on emploie simplement l'expression « fortement corrélées » pour qualifier les deux variables.
Une corrélation égale à 0 signifie que les variables sont linéairement indépendantes.

IV Somme de VAR discrètes

1 Linéarité de l'espérance

Théorème 3
Soit X et Y deux VAR discrètes et a, b deux réels. Alors

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Théorème 4
Soient $X_1, \cdots, X_n$ n VAR discrètes admettant toutes une espérance. Alors la variable $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance et

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

2 Variance

Théorème 5

- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X,Y)$
- Si X et Y sont indépendantes $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Théorème 6

- Soient $X_1, \cdots, X_n$ des VAR discrètes admettant toutes un moment d'ordre 2. Alors la variable $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance et

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

- Si les $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Il est très important de bien connaitre ces deux théorèmes.

3 Somme de VAR indépendantes suivant une loi binomiale ou une loi de Poisson

Théorème 7

- Si X et Y sont deux VAR **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n,p) et (m,p) alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n+m,p)$.
- Si $X_1, \cdots, X_k$ sont k VAR **mutuellement indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs $(n_1,p), \cdots, (n_k,p)$ alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_k$ suit une loi binomiale de paramètre $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$.

Théorème 8

- Si X et Y sont deux VAR **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
- Si $X_1, \cdots, X_k$ sont k VAR **mutuellement indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.