

## Résumé de Cours

**Convergences et approximations**

Dans tout ce chapitre, les démonstrations seront faites dans le cas des variables discrètes et des variables à densité.

**I Inégalité de Bienaymé-Tchebychev****Théorème 1**

Soit  $X$  une VAR admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

**Démonstration :**

Comme  $X$  admet un moment d'ordre 2,  $X$  admet bien une espérance et une variance.

• Si  $X$  est une variable discrète :

On pose  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$  et  $p_i = P(X = x_i)$ .

Par définition on sait que  $V(X) = E((X - E(X))^2)$ . Donc d'après le théorème de transfert :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2 p_i$$

Et de plus :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = \sum_{j \in J} p_j \quad \text{où } J = \{j \in I / |x_j - E(X)| \geq \varepsilon\}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{j \in J} (x_j - E(X))^2 p_j + \sum_{i \notin J} (x_i - E(X))^2 p_i \\ &\geq \sum_{j \in J} (x_j - E(X))^2 p_j \\ &\geq \varepsilon^2 \sum_{j \in J} p_j \\ &\geq \varepsilon^2 P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \\ \Leftrightarrow P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) &\leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

- Si  $X$  est une variable à densité :

On a ici :

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} (x - E(X))^2 f(x) dx + \int_{E(X)-\varepsilon}^{E(X)+\varepsilon} (x - E(X))^2 f(x) dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \end{aligned}$$

Et de plus

$$\begin{aligned} P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) &= P(X \leq E(X) - \varepsilon) + P(X \geq E(X) + \varepsilon) \\ &= \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} f(x) dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} V(X) &\geq \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} (x - E(X))^2 f(x) dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \\ &\geq \varepsilon^2 \left( \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} f(x) dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx \right) \\ \Leftrightarrow P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) &\leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

□

### Remarque :

Lorsque  $|X - E(X)| \geq \varepsilon$ , les valeurs de  $X$  sont à une distance plus grande que  $\varepsilon$  de leur moyenne  $E(X)$ . Donc  $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon)$  mesure la probabilité que  $X$  prenne des valeurs éloignées de  $E(X)$ . Cette probabilité est d'autant plus faible que  $V(X)$  est petit (la variance mesure « l'étalement » des valeurs prises par  $X$ ) et que  $\varepsilon$  est grand (plus on est loin de la moyenne moins on trouve de valeurs de  $X$ ).

### Exemple 1:

On utilise un dé cubique parfait. On cherche le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du « 1 » diffère de  $\frac{1}{6}$  d'au plus  $\frac{1}{100}$ .

1. Lorsqu'on a effectué  $n$  lancers, on note  $X_n$  le nombre de 1 obtenus, et  $F_n$  la fréquence d'apparition du 1 au cours de ces  $n$  lancers. Exprimer  $F_n$  en fonction de  $X_n$  et de  $n$ .
2. Traduire à l'aide d'une inégalité ce que l'on cherche dans l'énoncé.
3. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver la valeur de  $n$  que l'on cherche.

1. La fréquence est égale au nombre de 1 obtenus divisé par le nombre total de lancers effectués donc on a  $F_n = \frac{X_n}{n}$ .

2. On cherche  $n$  pour que  $P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) \geq 0,95$ .

3. Nous souhaitons ici appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sur  $F_n$  avec  $\varepsilon = \frac{1}{100}$ . Nous avons besoin de  $E(F_n)$  et de  $V(F_n)$ .

$X_n$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$  donc  $E(X_n) = \frac{n}{6}$  et  $V(X_n) = \frac{5n}{36}$ .

On en déduit donc que  $E(F_n) = \frac{1}{6}$  et  $V(F_n) = \frac{5}{36n}$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq \frac{1}{100}\right) \leq \frac{5 \cdot 10^4}{36n}$$
$$\Leftrightarrow P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) \geq 1 - \frac{5 \cdot 10^4}{36n}$$

Il suffit donc de choisir  $n$  tel que  $1 - \frac{5 \cdot 10^4}{36n} \geq 0,95$  c'est-à-dire  $n \geq 27778$ .

## II Convergence d'une suite de VAR

### 1 Loi faible des grands nombres

#### **Théorème 2**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de VAR indépendantes, admettant une même espérance  $m$  et une même variance  $\sigma^2$ . On pose  $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ . Alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0$$

On dit que  $\bar{X}_n$  converge en probabilité vers la variable constante égale à  $m$ .

#### **Démonstration :**

On a  $E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} nm = m$  et comme les variables sont indépendantes,

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$0 \leq P(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Donc par encadrement de limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0$

□

#### **Remarque :**

On considère une suite d'épreuves indépendantes, et un événement  $A$ , de probabilité  $p$ , qui peut ou non se réaliser au cours d'une des épreuves. On note  $X_i$  la variable qui vaut 1 si  $A$  s'est réalisé à la  $i$ -ème épreuve et 0 sinon. Dans ce cas  $\bar{X}_n$  représente la fréquence de réalisation de l'événement  $A$  au cours des  $n$  premières épreuves. La loi faible des grands nombres nous dit que cette fréquence « tend » vers  $p$ .

Cela justifie *a posteriori* notre façon d'introduire la notion de probabilité, c'est-à-dire comme étant la limite de la fréquence d'apparition de l'événement donné.

### 2 Convergence en loi

#### **Définition 1**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de VAR. On note  $F_{X_n}$  la fonction de répartition de  $X_n$ .

On dit que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge en loi** vers la VAR  $X$ , de fonction de répartition  $F_X$ , si pour tout  $x \in \mathbb{R}$  où  $F_X$  est continue, la suite  $(F_{X_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $F_X(x)$ .

### Exemple 2:

Soit  $X$  une VAR à densité. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose  $X_n = e^{1/n}X$ .

Montrons que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers  $X$ .

On note  $F$  la fonction de répartition de  $X$  et  $F_n$  la fonction de répartition de  $X_n$ .

Il faut ici montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x)$ . Pour cela on va exprimer  $F_n(x)$  en fonction de  $F(x)$ .

Pour tout réel  $x$ , on a  $F_n(x) = P(X_n \leq x) = P(e^{1/n}X \leq x) = P(X \leq e^{-1/n}x) = F(e^{-1/n}x)$ .

Or, pour tout réel  $x$  fixé,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-1/n}x = x$  et comme  $X$  est une variable à densité,  $F$  est continue en  $x$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(e^{-1/n}x) = F(x)$ .

Ainsi, pour tout réel  $x$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x)$  donc  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$ .

### Propriété 1

Soit  $(X_n)$  une suite de VAR convergeant en loi vers la VAR  $X$ . Pour tous points  $a$  et  $b$  de continuité de  $F_X$  tels que  $a < b$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a < X_n \leq b) = P(a < X \leq b)$$

### Théorème 3

Soient  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de VAR **discrètes** et  $X$  une VAR **discrète** telles que pour tout entier  $n$ ,  $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$  et  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ .

Alors  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $X$  ssi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$$

Nous admettrons ici ce théorème. Vous pourrez trouver une démonstration dans la plupart des livres de cours d'ECE2.

**Attention** certaines suites de VAR discrètes convergent en loi vers une VAR à densité!!! Dans ce cas le théorème précédent ne s'applique plus.

### Exemple 3:

Soit une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de VAR telles que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $X_n$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\frac{1}{n}$ .

Montrer que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

Comme on sait à l'avance que la limite de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  va être une variable discrète on peut utiliser le théorème précédent.

Pour tout entier naturel  $k$ , on a  $P(X_n = k) = \frac{e^{1/n}(1/n)^k}{k!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k e^{1/n}$

Il nous faut séparer le cas  $k = 0$  car alors  $\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1$ .

• On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{0!} \times 1 \times e^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1/n} = 1$

• Si  $k \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = 0$ .

Ainsi  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable  $X$  qui vérifie  $P(X = 0) = 1$  et pour tout entier  $k$  non nul  $P(X = k) = 0$ .  $X$  est la variable certaine égale à 0.

**Théorème 4**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variable aléatoires réelles définies sur une même espace probabilisé et **indépendantes**. On suppose que les  $X_n$  ont toutes la même loi et qu'elles admettent une variance non nulle.

On note :

$$E(X_1) = m \quad V(X_1) = \sigma^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad Y_n = \frac{S_n}{n}$$

$$\text{On a donc } S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(Y_n - m)}{\sigma} = Y_n^*$$

Alors la suite  $(S_n^*)$  (et donc la suite  $(Y_n^*)$ ) converge en loi vers une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Remarques :**

- On a donc pour  $a > b$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a < S_n^* \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ .
- Comme  $S_n = \sigma\sqrt{n}S_n^* + nm$ , ce théorème nous permet de dire que pour  $n$  assez grand la variable aléatoire  $S_n$  suit approximativement la loi  $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$ .
- C'est un théorème remarquable car le résultat est très fort et contient peu d'hypothèses. De plus il montre l'importance de la loi normale en probabilités et statistiques.
- Ce théorème est parfois appelé « théorème central limite ».
- En pratique pour  $n \geq 30$ , on pourra approcher la loi de  $S_n^*$  par la loi normale centrée réduite. Ce théorème sera à l'origine de plusieurs approximations de lois.

**Exemple 4:**

Une montre fait une erreur d'au plus une demi-minute par jour. On cherche à déterminer la probabilité que l'erreur commise au bout d'une année (non bissextile) soit inférieure ou égale à un quart d'heure.

Pour cela, on considère que l'erreur commise un jour donné, en secondes, suit une loi uniforme sur  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$  et que les erreurs commises chaque jour sont indépendantes. On donne  $\frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}} \approx 2,72$ .

On note  $X_k$  l'erreur commise le  $k$ -ième jour de l'année. D'après nos hypothèses  $X_k$  suit la loi uniforme sur  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$  et les  $X_k$  sont indépendantes. De plus l'erreur commise au bout d'un an, est  $S = \sum_{k=1}^{365} X_k$ . On cherche donc à calculer  $P(-15 \leq S \leq 15)$ .

On a ici  $E(X_k) = 0$  et  $V(X_k) = \frac{1}{12}$ , donc  $E(S) = 0$  et  $V(S) = \frac{365}{12}$

Donc la variable centrée réduite associée à  $S$  est  $S^* = \frac{S\sqrt{12}}{\sqrt{365}}$ .

Comme  $365 > 30$ , le théorème de la limite centrée nous dit que  $S^*$  suit approximativement la loi normale centrée réduite et donc :

$$\begin{aligned} P(-15 \leq S \leq 15) &= P\left(-\frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}} \leq \frac{S\sqrt{12}}{\sqrt{365}} \leq \frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}}\right) = P\left(-\frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}} \leq S^* \leq \frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}}\right) - \Phi\left(-\frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}}\right) \\ &\approx 2\Phi\left(\frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}}\right) - 1 \approx 2\Phi(2,72) - 1 \approx 0,9934 \end{aligned}$$

### III Approximation de variables aléatoires

#### 1 Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale

##### **Théorème 5**

Soient  $n$  un entier fixé et  $p \in ]0; 1[$ . On pose  $I = \{N \in \mathbb{N} / Np \in \mathbb{N}\}$ . Soit  $(X_N)_{N \in I}$  une suite de VAR telle que pour tout  $N$ ,  $X_N$  suit la loi hypergéométrique  $\mathcal{H}(N, n, p)$ . Alors  $(X_N)$  converge en loi vers une VAR  $X$  qui suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .

##### Démonstration : Hors programme

On a :

$$\begin{aligned} P(X_N = k) &= \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{(Np)!(Nq)!n!(N-n)!}{k!(Np-k)!(n-k)!(Nq-n+k)!N!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(Np)(Np-1) \cdots (Np-k+1) \times (Nq) \cdots (Nq-n+k+1)}{N(N-1) \cdots (N-n+1)} \end{aligned}$$

Le produit  $(Np)(Np-1) \cdots (Np-k+1) \times (Nq) \cdots (Nq-n+k+1)$  possède  $n$  facteurs chacun équivalent à  $Np$  ou  $Nq$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$  donc est équivalent à  $(Np)^k (Nq)^{n-k}$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ . De même  $N(N-1) \cdots (N-n+1) \sim N^n$  donc on en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(X_N = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$X_N$  converge bien en loi vers une VAR  $X$  qui suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ .

□

##### En pratique :

Dès que  $N \geq 10n$ , on pourra dire que l'on peut approcher la loi hypergéométrique par la loi binomiale.

##### Exemple 5:

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique  $\mathcal{H}(100; 4; 0, 05)$ . Nous allons calculer  $P(X \geq 1)$ .

- Calcul exact :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{5}{0} \binom{95}{4}}{\binom{100}{4}} \approx 0,188$$

- Calcul approché : on approche la loi  $\mathcal{H}(100; 4; 0, 05)$  par la loi  $\mathcal{B}(4; 0, 5)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} (0,05)^0 (0,95)^4 \approx 0,185$$

**Théorème 6**

Soit  $\lambda$  un réel strictement positif et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de VAR discrètes telles que  $X_n$  suit la loi binomiale de paramètre  $\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ . Alors  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers une VAR  $X$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

**Démonstration :**

On a

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} e^{(n-k)\ln(1-\lambda/n)} \end{aligned}$$

On a lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,  $n(n-1) \cdots (n-k+1) \sim n^k$

De plus comme  $\frac{\lambda}{n} \rightarrow 0$ ,  $\ln(1 - \lambda/n) \sim -\frac{\lambda}{n}$ . Donc on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Ainsi  $X_n$  converge bien en loi vers une variable qui suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ .

□

**En pratique :**

On considère que lorsque  $n \geq 30$  et  $p \leq 0,1$ , on peut approcher la loi  $\mathcal{B}(n, p)$  par la loi  $\mathcal{P}(np)$ . On dit que la loi de Poisson est la loi des événements rares (elle approche le tirage de  $n$  boules avec remise dans une urne contenant des boules blanche en proportion égale à  $p$  qui est faible).

**Exemple 6:**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale  $\mathcal{B}(100; 0,05)$ . Nous allons calculer  $P(X = 2)$ .

- Calcul exact :

$$P(X = 2) = \binom{100}{2} (0,05)^2 (0,95)^{98} \approx 0,0812$$

- Calcul approché : on approche la loi  $\mathcal{B}(100; 0,05)$  par la loi  $\mathcal{P}(5)$

$$P(X = 2) \approx \frac{5^2}{2!} e^{-5} \approx 0,0843$$

**Théorème 7**

Soit  $p \in ]0; 1[$ ,  $q = 1 - p$  et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires telle que  $S_n$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ . Alors la suite de variable aléatoire  $S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$  converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

**Démonstration : Hors programme**

Toute variable binomiale de paramètre  $(n, p)$  peut être considérée comme la somme de  $n$  variables aléatoires de Bernoulli de paramètre  $p$  mutuellement indépendantes. On a donc

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \text{ où } X_k \text{ est une variable de Bernoulli de paramètre } p. \text{ Comme les variables de}$$

Bernoulli admettent une espérance  $p$  et une variance  $pq$ , le théorème de la limite centrée s'applique bien et il nous donne le résultat demandé. □

**En pratique :**

On considère que pour  $n \geq 30$ ,  $np \geq 5$  et  $nq \geq 5$ , on peut approcher la loi  $\mathcal{B}(n, p)$  par la loi  $\mathcal{N}(np, npq)$ . En exercice, on se ramènera plutôt au fait que la loi de  $X^*$  peut être approchée par la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Correction de continuité :**

Si  $S_n$  suit une loi  $\mathcal{B}(n, p)$  avec  $n$  et  $p$  tels que on peut approcher  $S_n$  par  $N_n$  qui suit la loi  $\mathcal{N}(np, npq)$ , on devrait écrire :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(S_n = k) \approx P(N_n = k)$$

mais comme  $N_n$  est une variable à densité, on a  $P(N_n = k) = 0$ , donc notre approximation ci-dessus n'est pas bonne. On écrira plutôt :

$$P(S_n = k) \approx P(k - 0,5 < N_n < k + 0,5)$$

et on appelle cela utiliser la **correction de continuité**.

**Exemple 7:**

Soit  $X$  une variable qui suit la loi  $\mathcal{B}(900; 0,5)$ . On cherche à calculer  $P(405 \leq X \leq 495)$ .

Pour le calcul exact, il nous faudrait calculer des combinaisons avec de très grands nombres, ce qui nécessite un ordinateur et ne donne parfois qu'une valeur approchée.

On remarque ici que l'on est dans les conditions où l'on peut approcher notre loi binomiale par une loi normale  $\mathcal{N}(450, 225)$  car  $900 > 30$  et  $900 \times 0,5 = 450 > 5$ .

Cependant pour la loi normale  $\mathcal{N}(450, 225)$  il n'est toujours pas facile de calculer  $P(405 \leq X \leq 495)$  car on ne connaît pas la fonction de répartition d'une loi normale quelconque. Nous sommes donc obligés de nous ramener à la loi normale centrée réduite en nous intéressant à la variable centrée réduite associée à  $X$ .

On a  $X^* = \frac{X - 450}{\sqrt{225}}$  et on a donc que la variable  $X^*$  suit approximativement la loi normale centrée réduite.

De plus  $P(405 \leq X \leq 495) = P\left(-3 \leq \frac{X - 450}{15} \leq 3\right) = P(-3 \leq X^* \leq 3)$ . Donc on a :

$$P(405 \leq X \leq 495) \approx \Phi(3) - \Phi(-3) \approx \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) \approx 2\Phi(3) - 1 \approx 0,9974$$

On verra en exercice que dans le cas du calcul de  $P(a \leq X \leq b)$  il n'est pas forcément nécessaire d'appliquer la correction de continuité, mais on peut parfois vous le demander.



**Théorème 8**

Soit  $\alpha$  un réel strictement positif et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variable aléatoires telle que  $S_n$  suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(n\alpha)$ . Alors la suite de variable aléatoire  $S_n^* = \frac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}$  converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

**Démonstration : Hors programme**

Toute variable de Poisson de paramètre  $n\alpha$  peut être considérée comme la somme de  $n$  variables aléatoires de Poisson de paramètre  $\alpha$  mutuellement indépendantes. On a donc

$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  où  $X_k$  est une variable de Poisson de paramètre  $\alpha$ . Comme les variables de

Poisson admettent une espérance  $\alpha$  et une variance  $\alpha$ , le théorème de la limite centrée s'applique bien et il nous donne le résultat demandé. □

**En pratique :**

On considère que pour  $\lambda \geq 18$  on peut approcher la loi  $\mathcal{P}(\lambda)$  par la loi  $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ .

**Correction de continuité :**

Tout comme précédemment il ne faut pas oublier d'appliquer, si nécessaire, la correction de continuité.

**Exemple 8:**

Ici encore pour de grandes valeurs de  $\lambda$ , la calcul de  $P(X \leq a)$  pourra nécessiter l'utilisation d'un ordinateur.

Si on considère  $X$  qui suit une loi de Poisson de paramètre 64 que l'on cherche à calculer  $P(X \leq 74)$ , on a intérêt à approcher la loi de  $X$  par la loi  $\mathcal{N}(64, 64)$  et donc  $\frac{X - 64}{8}$  suit la loi normale centrée réduite. On a donc

$$P(X \leq 74) = P\left(\frac{X - 64}{8} \leq 1,25\right) \approx \Phi(1,25) \approx 0,8944$$