My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُّونِي مُولَايِ اسْمَاعِيل

Probas 3
Convergence & Estimateurs

Nature : Concours Mines-Centrales
Difficulté : ***
Importance: ***

Objectifs

- Apprendre et bien appliquer les inégalités de Markov et Bienyamé pour étudier la convergence en loi ou en probas
- Maîtriser les notions d'estimateurs avec ou sans biais et de convergence en biais

Année	Centrale	Mines
2019	**Maths 2**	
2018	**Maths 1**	
2016	**Maths 1**	**Maths 1**

1. Inégalités Classiques

Théorème 1 : **Inégalité de Markov**

Si X une VAR discrète ou à densité positive, admettant une espérance E(X) finie non nulle, alors qlq soit $\varepsilon>0$, on a :

$$p(X \geq \varepsilon) \leq E(X) / \varepsilon$$

Théorème 2 : **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Si X une VAR discrète ou à densité, admettant une espérance E(X) et une variance V(X) finies non nulles, alors qlq soit $\varepsilon>0$, on a :

$$p(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq V(X) / \varepsilon^2$$

2. Convergence en probabilité

Définition

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de VAR, et X une autre VAR.

On dit que X_n converge en probabilité vers X, ssi

$$\lim_{n\to+\infty} p(|X_n - X| > \varepsilon) = 0, \forall\varepsilon > 0$$

Théorème 1

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de VAR, et X une autre VAR.

On dit que X_n converge en probabilité vers X, ssi

$$\lim_{n\to+\infty} p(|X_n - X| > \varepsilon) = 0, \forall\varepsilon > 0$$

Classique Concours 1 : Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in IN*}$ une suite de VAR (discrètes ou à densité) mutuellement indépendantes suivant une même loi qu'une VAR, X, ayant une espérance E(X) et une variance V(X) finies non nulles.

On pose $Z_n = (X_1 + \cdot\cdot\cdot + X_n) / n$ (Moyenne arithmétique)

Alors

- $\forall\varepsilon > 0, \forall n \in IN^*, p(|Z_n - E(X)| > \varepsilon) \leq V(X) / n\varepsilon^2$
- $(Z_n)_{n\in IN*}$ converge en probabilité vers la variable constante E(X)

Classique Concours 2 : Loi d'or de Bernoulli
Soit $(X_n)_{n\in IN*}$ une suite de VAR (discrètes ou à densité) mutuellement indépendantes suivant une même loi qu'une VAR de Bernoulli $X \to B(p)$, ayant une espérance E(X) et une variance V(X) finies non nulles.
On pose $Z_n = (X_1 + \cdot\cdot\cdot + X_n) / n$ (Moyenne arithmétique)
Alors
- $\forall\varepsilon > 0, \forall n \in IN^*, p(|Z_n - p| > \varepsilon) \leq 1 / 4n\varepsilon^2$
- $(Z_n)_{n\in IN*}$ converge en probabilité vers la variable constante p

3. Convergence en loi

Définition 1
Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de VAR à densité, et X une autre VAR à densité.
On dit que X_n converge en loi vers X, ssi
$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(t)=F_X(t), \text{ en tout point t de continuité de } F_X$$

Définition 2
Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de VAR discrètes, et X une autre VAR discrètes.
On dit que X_n converge en loi vers X, ssi
$$\lim_{n\to+\infty} p(X_n=x)=p(X=x), \text{ en tout point } x\in X(\Omega)$$

Théorème 2
Si X_n converge vers X en probabilité alors X_n converge vers X en loi.

Remarque
La réciproque du théorème 2 n'est pas en général vrai, cad
la converge en loi n'implique pas la convergence en probas

4. Estimateurs

Définition 1

Si X_n des VAR discrètes ou à densité,admettant des espérance $E(X_n)$ finies

Si θ un nombre réel

On pose $b_n(\theta)=E(X_n) - \theta$ et l'appelle le biais de X_n en θ

Définition 2

Si X_n des VAR discrètes ou à densité,admettant des espérance $E(X_n)$ finies

Si θ un nombre réel

- On dit que X_n est un estimateur de X_n sans biais quand $b_n(\theta)=0$
- On dit que X_n est un estimateur de X_n avec biais quand $b_n(\theta)\neq 0$

Définition 3

Si X_n des VAR discrètes ou à densité,admettant des espérance $E(X_n)$ finies et des variances finies $V(X_n)$

Si θ un nombre réel

On pose $r_n(\theta)=b_n^2(\theta)+V(X_n)$ et l'appelle le risque quadratique de X_n en θ

Théorème 1

Si X_n des VAR discrètes ou à densité,admettant des espérance $E(X_n)$ finies et des variances finies $V(X_n)$

Si θ un nombre réel, alors

$$r_n(\theta)=E\left[(X_n- \theta)^2 \right]$$

Définition 4

On dit qu'une suite d'estimateurs $(X_n)_{n\in IN*}$ est asymptotiquement sans biais ssi $\lim b_n(\theta) = 0$.

Théorème 2

$\lim r_n(\theta) =0 \Leftrightarrow \lim V(X_n)=0$ et $\lim b_n(\theta)=0$

Démo :

Découle de $r_n(\theta)=b_n^2(\theta)+V(X_n)$ et du fait que $V(X_n)\geq 0$

Astuce 1
Pour montrer que X_n est asymptotiquement sans biais, il suffit de vérifier que $\lim r_n(\theta) = 0$

Définition 4
On dit que la suite d'estimateur $(X_n)_{n \in IN*}$ est convergent ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \lim p(|X_n - \theta)| > \varepsilon) = 0.$$

Astuce 2
Pour montrer que la suite d'estimateur $(X_n)_{n \in IN*}$ est convergent, on utilise l'inégalité de Bienyamé-Tchebechev

$$p(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq V(X) / \varepsilon^2$$

Théorème 3
Si la suite d'estimateur $(X_n)_{n \in IN*}$ est sans biais tel que $\lim V(X_n) = 0$, alors la suite d'estimateur converge.

Théorème 4
Si la suite d'estimateur $(X_n)_{n \in IN*}$ asymptotiquement sans biais tel que $\lim V(X_n) = 0$, alors la suite d'estimateur $(X_n)_{n \in IN}$ converge.

Astuce 3
Pour montrer que la suite d'estimateur $(X_n)_{n \in IN*}$ est convergent, on utilise

- **Méthode 1** : On montrer que $b_n(\theta)=0$ et $\lim V(X_n) = 0$
- **Méthode 2**: On montrer que $\lim b_n(\theta)=0$ et $\lim V(X_n) = 0$