My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُونِي مُولَاي اسمَاعِيل

PrEPaS

MP

Probas I

Élémentaire & Conditionnelle & Composée

Objectifs

- Apprendre les formules de bases
- Maîtriser la technique pour résoudre un problème de probabilité

1. Vocabulaire

Expérience aléatoire :
Expérience dont on ne connaît pas l'issue (le résultat)

Exemple
lancer une pièce de monnaie, un dé, tirer une boule

Événement :
- une issue possible de l'expérience,
- ou bien issue impossible notée $\varnothing$
- ou bien issue certaine, notée Ω, appelé l'univers

**Exemple : ** Lancé un dé :
Avoir la face paire est un événement possible
Avoir une face=9, impossible
Avoir une face entre 1 et 6 : certain

Règle 1 :
En probas, les événements sont en général notés par des lettres majuscules

Événement contraire :
noté non A

Deux événements incompatibles :
Ne peuvent pas se réaliser en même temps, cad $A \cap B = \varnothing$ (disjoints)

Exemple : On lancé un dé
- A=face obtenue est paire, B=face obtenue est impaire
  Ici A et B sont incompatibles
- A=face est paire, B=face est un multiple de 3
  Ici A et B sont compatibles, $A \cap B = \{6\}$

Événements indépendants
la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre

Exemples

- on lance deux dés de couleurs différentes en même en temps
  les résultats des deux expériences sont indépendantes
- on lance une pièce de monnaie, si Pile on assiste au cours, sinon on n'assiste pas.
  Les résultats des deux expériences sont dépendants

Système complets d'événements :
Une famille de plusieurs événements (A_i) tq

- deux à deux incompatibles
- qui recouvrent tous les cas possibles

Autrement dit

$$\mathbf{A_i \cap A_j = \varnothing, \forall\, i \neq j}$$
$$\mathbf{\bigcup A_i = \Omega}$$

Astuce :
Pour trouver un système complet il suffit de partager tous les cas possibles en deux ou plusieurs cas

Exemple : Lancer un dé : cas possibles A={1, 2,3, 4,5,6}

- A={1}, B={2,3}, C={4,5,6} est un système complet
- A={1,2}, B={3,4,5,6} est un système complet
- A={1,2,3}, B={4}, C={5}, D={6}

Exemple : On joue un match :
cas possibles A={1=locaux gagnent, X=match nul, 2= visiteurs gagnent}

- A={1}, B={2}, C={X} est un système complet
- A={1,2}, B={X} est un système complet
- A={1,X}, B={2} est un système complet

Théorème 1
{A , non A} est toujours un système complet d'événements

Demo : $A \cap$ **non** $\mathbf{A=\varnothing}$ **et** $\mathbf{A \cup}$ **non** $\mathbf{A= \Omega}$

Règle 2 :
Pour calculer la proba d'un événement, il est conseillé de le partager en plusieurs cas possibles en utilisant un système complet bien choisie

Exemple
Une population est formée par des hommes et des femmes, quelques uns ont les yeux verts et les autres les yeux bleus
Règle 1 :

- H : Hommes, F : Femmes, V : yeux verts, B : yeux bleus

Règle 2
Si on veut calculer la proba des femmes, il est conseillé de partager cet événement en deux :
$F\cap V$={femmes aux yeux verts} et $F\cap B$={femmes aux yeux bleus}

Exemple
Un tournoi à 4 équipes la qualification du Maroc dépend de son dernier match et celui de l'autre match
p(Maroc se qualifie) dépend de son match et celui de l'autre match

2. Proba élémentaires

Objectif :
calculer la proba qu'un événement se réalise indépendamment des autres

Définition
Une probabilité est une application $p : P(\Omega) \rightarrow [0,1]$ qui à chaque événement A, associe un nombre $p(A) \in [0,1]$

1. $p(\varnothing)=0$, $p(\Omega)=1$
2. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Interprétation
p(A) désigne la probabilité que A se réalise

Exemple : On lancé un dé
$p(Face=1) = 1/6$
$p(2<Face \leq 4) = 2/6$

Théorème 1 : Formules utiles

- Si $A \cap B=\varnothing$, alors $p(A \cup B)=p(A)+p(B)$
- $p(\text{non } A)=1-p(A)$
- $p(A \setminus B)=p(A) - p(B)$ quand $B \subset A$

Demo : A faire

Astuce
En cas d'événements incompatibles, le« ou » en probas se traduit par un +
Sinon il faut enlever la probabilité des répétitions

Règle 3
parfois pour calculer la probas d'un événement, il est plus facile de calculer la probas de son événement contraire.
Surtout quand l'événement contient le mot « au moins »

Classique :
A= au moins une ..., Non A=Aucune ...

Exemple de base :

lancer simultanément deux dés de couleurs différentes l'un noir et l'autre rouge

card(Ω)=6x6 , car ici il s'agit d'une liste a deux cases : case 1 : nombre du dé 1, case 2 : nombre du dé 1.

Pas de répétitions **(1,2) ≠(2,1)**

A= (Face du dé noir + Face du dé rouge au moins égale 3)
non A = Face du dé noir + Face du dé rouge est au maximum égale 2
cas possibles dans non A : (1,1)

A= (Face du dé noir + Face du dé rouge est au plus égale 10)
non A = Face du dé noir + Face du dé rouge est égale à 11 ou 12
cas possibles de non A = {(5,6), (6,5), (6,6)}

Règle 5
Lors de la résolution d'un exercice de probas, il faut avant toute chose calculer d'abord card(Ω)= Nbr total de tous les cas possibles
Éviter de donner des nombres toute de suite, commencer par un raisonnement de dénombrement (voir chapitre précédent)

Exemple :

lancer un dé : card(Ω)=6

Exemple de base :

lancer simultanément deux dés de couleurs différentes l'un noir et l'autre rouge

card(Ω)=6x6 , car ici il s'agit d'une liste a deux cases : case 1 : nombre du dé 1, case 2 : nombre du dé 1.

Pas de répétitions **(1,2) ≠(2,1)**

Règle 4:
Dans un raisonnement de dénombrement il faut faire attention aux répétitions possibles, dans un tel cas il faut les enlever

Exemple : lancer simultanément deux dés de même couleurs (noirs)

répétitions

Nbr total avec répétitions = 36

(**1**,**2**)=(**2**,**1**), (1,3)=(3,1),(1,4)=(4,1), (1,5)=(5,1), (1,6)=(6,1) au total 5

(2,3)=(3,2), (2,4)=(4,2), (2,5)=(5,2), (2,6)=(6,2) au total 4

(3,4)=(4,3) ...(3,6)=(6,3)   au total 3

(4,5)=(5,4) et (4,6)=(6;4) au total 2

(5,6)=(6,5) au total 1

Au total 5+4+3+2+1=15 répétitions

card(Ω)=36-15=21

Théorème : Probabilité élémentaire

p(A)=card(A) / card(Ω)

Astuce :

Pour calculer la probabilité d'un événement, il est conseillé de raisonner comme suit

- **étape 1** : Calculer card(Ω)=Nbr de tous les cas possibles
- **étape 2** : Parmi ces cas possibles, calculer le nombre de ceux qu sont favorables à la réalisation de A, cad card(A)
- **étape 3** : utiliser la formule des probabilités élémentaires

  p(A)=card(A)/card(Ω)

Exemple : On lance simultanément un dé noir et un dé rouge

card(Ω)=36

1. **A : face du dé noir est paire**.
   Les cas favorables sont des couples (i,j) tq i=pair et j qlq.
   Il s'agit d'une liste à deux cases sans répétitions : case 1=3 cas, case 2=6 cas. Total =18, p(A)=18/36
2. **B : face du dé rouge est impaire.** Les cas favorables sont des couples (i,j) tq i=qlq et j impaires. Il s'agit d'une liste à deux cases sans répétitions : case 1=6 cas, case 2=3 cas. Total =18, p(B)=18/36=1/2
3. **C : les deux faces sont paires.** Les cas favorables sont des couples (i,j) tq i=pair et j pair. Il s'agit d'une liste à deux cases sans répétitions : case 1=3 cas, case 2=3 cas. Total =9, p(C)=9/36=1/4

4. **D: les deux faces sont même parité**. Les cas favorables sont des couples (i,j) tq (i=pair et j pair) ou bien (i=impair et j impair.) Il s'agit de deux liste à deux cases sans répétitions :
   liste 1 : case 1=3 cas, case 2=3 cas. liste 2 : case 1=3 cas, case 2=3 cas. Total =18, p(D)=18/36=1/2

Exercice

Reprendre l'exemple suivant si on suppose cette fois les deux dés sont noirs

3. Proba conditionnelle & Composée

Objectifs :

1. Proba Conditionnelle : calculer la proba qu'un événement se réalise sachant qu'une autre est déjà réalisé
2. Proba Composée : calculer la proba que deux événements se réalisent en même temps

Définition : Probas conditionnelle

$$p_B(A)=p(A \cap B) / p(B)$$

Remarque

$p_B(A)$: se lit la probabilité que A se réalise sachant que B est déjà réalisé
Elle calcule la probabilité que A se réalise sachant que B est déjà réalisé

Astuce

Pour calculer $p_B(A)$, il faut procéder comme suit

- supposer que B est déjà réalisé
- Calculer combien de cas possible pour que B se réalise
- Parmi ces cas, calculer combien y'en a t il qui sont favorables à A
- Conclure $p_B(A)$ = rapport

Exemple

	I= Ingénieurs	M=Médecins
F= Filles	25	35
G= Garçons	10	30

Calculer $P_F(I)$
On suppose que F réalisé
Nbr de cas possibles pour F : 60
Parmi ces 60 cas, combien favorable à I : 25, donc $P_F(I)=25/60$
Calculer $P_I(F)$
On suppose que I réalisé
Nbr de cas possibles pour I : 35
Parmi ces 35 cas, combien favorable à I : 25, donc $P_I(F)=25/35$
$P_F(I) \neq P_I(F)$

Théorème 1 : Probas composée

$$p(A \cap B)= p_B(A).p(B) = p_A(B) . p(A)$$

Demo :

Remplacer $p_B(A)=p(A \cap B) / p(B)$

Remarque

Probas composée permet de calculer la probabilité que deux événements se réalisent en même temps

Exemple

	I= Ingénieurs	M=Médecins
F= Filles	25	35
G= Garçons	10	30

$P_F(I)=25/60$, donc $p(F \cap I) =P_F(I).p(F)=(25/60)\ (60/100)=25/100$
$P_I(F)=25/35$, donc $p(F \cap I) =P_I(F).p(I)=(25/35)\ (35/100)=25/100$

Théorème 2 : Probas Totale (version faible) :

$$p(A)=p_B(A).p(B)+p_{\text{non } B}(A).p(\text{non } B)$$

Demo : A apprendre (pour les MP)

$p_B(A).p(B)+p_{\text{non } B}(A).p(\text{non } B) = p(A \cap B) + p(A \cap \text{non } B)$
$=p[(A \cap B) \cup (A \cap \text{non } B)] = p(A \cap (B \cup \text{non } B))$
$=p(A \cap \Omega) =p(A)$

Remarque

La formule des probas totale permet de calculer la probas que A se réalise en de partageant en deux cas: B réalisé ou non B réalisé

Règle 7:
Parfois, pour calculer la proba d'un événement, il est conseillé de le partager en plusieurs cas possibles et calculer sa probas à l'aide de la formule des probas totales

Exemple précédent

$p(F)=p_M(F).p(M) + p_I(F).p(I) =(35/65).(65/100) +(25/35).(35/100)=60/100$

Théorème 3 : Probas Totale (version forte)

Si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système complet d'événements
Alors pour tout événement A, on a la formule suivante

$$p(A)=\Sigma_{1\leq i\leq n}\ p_{Ai}(A)p(A_i)$$

Demo

$\Sigma_{1\leq i\leq n}\ p_{Ai}(A)p(A_i) =\Sigma_{1\leq i\leq n}\ p(A\cap A_i) = p[\cup_{1\leq i\leq n}(A\cap A_i)]$

$= p[A\cap\cup_{1\leq i\leq n}A_i] = p[A\cap\Omega] =p(A)$

Exemple

Si le système complet est {A,B,C},
Alors $p(D)=p_A(D)p(A)+p_B(D)p(B)+p_C(D)p(C)$

Astuce

Pour calculer p(A) il est conseillé de partager A en plusieurs cas possibles en utilisant un système complet (Ai) puis appliquer formule des probas totale

Remarque

La version faible des probas totale est un cas particulier de la version forte si on prend comme système complet {B, non B}

Théorème 4 : Formule de Bayes

Si A et B sont deux événements qlq, alors

$$p_A(B)=[p_B(A).p(B)] / [p_B(A).p(B)+p_{\text{non }B}(A).p(\text{non }B)]$$

Demo

$[p_B(A).p(B)] / [p_B(A).p(B)+p_{\text{non }B}(A).p(\text{non }B)] = p(A\cap B)/ p(A)=p_A(B)$

Bilan
Probas élémentaire : permet de calculer la probabilité d'un événement sans se soucier des autres événements
Probas totale: permet de calculer la probabilité d'un événement en le divisant en plusieurs cas possibles à l'aide d'un système complet
Probas conditionnelle permet de calculer la probabilité d'un événement sachant qu'un autre est déjà réalisé
Probas composée permet de calculer la probabilité deux événements se réalise en même temps
la formule de Bayes permet de calculer la probas conditionnelle inverse

Théorème 5 : Formules à retenir
1. $p_B(\varnothing)=0$, $p_B(\Omega)=1$
2. $p_B(B)=1$
3. $p_B(A \cup C)=p_B(A)+p_B(C) - p_B(A \cap C)$
4. $p_B(\text{non } A)=1- p_B(A)$

Demo : **A faire**

Remarque :
les probabilités conditionnelles sont des probabilités élémentaires où la condition devient un événement certain.

Exemple

	I= Ingénieurs	M=Médecins
F= Filles	25	35
G= Garçons	10	30

$p_F(M) = p(M \cap F)/p(F)=[35/100] / [60/100]=35/60$
$p(M \cap F)= 35/100$
$p_M(F) =p(M\cap F)/p(M)=[35/100] / [65/100]=35/65$
$p_{\text{non } M}(F)=p_I(F)=p(I \cap F)/p(I)=[25/100] / [35/100]=25/35 \neq 1-p_M(F)$

Remarque-Astuce
1. $p_A(B) \neq p_B(A)$
2. $p_B(\text{non } A)=1- p_B(A)$
3. $p_{\text{non } B}(A) \neq 1- p_B(A)$

Astuce : Méthode de résolution d'un exercice de probas

Pour résoudre un exercice de probas, il est conseillé de suivre les étapes suivantes

- **étape 1** : Représenter les mots clés de l'énoncé par des lettres majuscules
  Dans le cas d'expériences successives ajouter des indices
- **étape 2** : Représenter les donnés chiffrées de l'énoncé par des probabilités
- **étape 3** : Représenter l'événement dont on veut calculer la probas à l'aide des les lettres utilisés dans l'étape 1
- **étape 4** : répondre à la question en utilisant les formules du cours ci-dessus

Exercice :

On a 4 dés non truqués, et 2 dés truqués où la probas d'avoir 6 est 2/3.

1) On lance un dé au hasard quelle la probas d'avoir 6

2) On lance un dé au hasard et on trouve 6, quelle est la probabilité qu'il soit truqué.

Solution

étape 1 : T : dé truqué. S= Avoir 6

étape 2 : $p(T)=2/6$, $p_T(S)=2/3$ et $p_{\text{non } T}(S)=1/6$

1. $p(S)=p_T(S)p(T)+p_{\text{non } T}(S)p(\text{non } T)=2/3.2/6+1/6.4/6 = 9/36$
2. évenement certain : avoir 6 = S
   $p_S(T)=p(S \cap T) / p(S) = p_T(S).p(T) / p(S) =|(2/3).(2/6)] / [9/36] =8/9$

Exercice : **Souris amnésiques**
On dispose de 20 souris
4 avec mémoire, 6 sans mémoire et 10 avec mémoire immédiate (se rappelle juste le dernier événement)
On dispose d’une chambre à 3 portes, dont deux avec une petite décharge électrique
On prend une souris au hasard, on s’intéresse au nombre d’essai possible pour qu’elle se dirige vers la bonne porte

1. Donner le nombre max d’essais pour chaque catégorie
2. On prend une souris au hasard
   Quelle la probas qu’elle sort sort après exactement deux essais
3. On prend une souris au hasard à sa sortie de la chambre
   Quelle la probas qu’elle soit sans mémoire

Solution
A faire

4. Indépendance

Rappel : On dit que deux événements A et B sont indépendants ssi la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre, dans ce cas
Autrement dit : $p_B(A)=p(A)$

Théorème 1 : Fondamentale

A et B indépendants <=> $p(A \cap B)=p(A).p(B)$

Demo

A et B sont indépendants <=> $p_B(A)=p(A)$ <=> $p(A\cap B)/p(B)=p(A)$
<=> $p(A \cap B)=p(A).p(B)$

Astuce

- En cas d'indépendance : la proba de «et» et «$\cap$ » deviennent le produit des probas
- Dans le cas général, on utilise probas composée

$$p(A \cap B)=p_A(B)p(A)=p_B(A)p(B)$$

Théorème 2 : **Formule des probas composée successives**

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\cap A_n)=p(A_1).\ p_{A1}(A_2)p_{A1\cap A2}(A_3)\ldots.p_{A1\ \cap A2\ \Pi \ldots\ \cap An-1}(A_n)$$

Demo (par récurrence)

n=3

$p(A \cap B\cap C)=p_{A\cap B}(C)p(A \cap B)=p_{A\cap B}(C)p_A(B)p(A)$
$=p(A)p_A(B)p_{A\cap B}(C)$

$p(A \cap B\cap C)=p(A)p_A(B)p_{A\cap B}(C)p(1er)p_{1er}(2eme)p_{1er\cap 2emme}(3eme)$

Définition 2

- $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux indépendants ssi
$$p(A_i \cap A_j) = p(A_i).p(A_j), \text{ qlq soit } i \neq j$$
- $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants ssi
$$p(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = p(A_1).\, p(A_2) \dots p(A_n)$$

Exemple : On a 3 trois élèves A,B, C

- **cas 1** : si l'un entre en cours, les autres doivent entrer
  B entre => A doit entrer : Oui
  B et C entrent = > A doit entrer : Oui
  la décision de A dépend de celle de B tout seul : Oui
  la décision de A dépend de celle de C tout seul : Oui
  la décision de A dépend de celles de B et C : Oui
  Dépendance deux à deux
- **cas 2** : si les deux entrent en cours, le 3ème entrer doit entrer
  B entre => A doit entrer : Non
  B et C entrent = > A doit entrer : Oui
  la décision de A dépend de celle de B tout seul : Non
  la décision de A dépend de celles de B et C : Oui
  Dépendance mutuelle

- **Conclusion** : Dépendance deux à deux => Dépendance mutuelle
  Par contraposée
  Indépendance mutuelle => Indépendance deux à deux

Théorème 3 :
Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants alors ils sont deux à deux indépendants

Demo : Voir remarque ci dessous

Remarque :
La réciproque du théorème 3, n'est pas toujours vrai,
cad deux à deux indépendants **n'implique pas toujours** que sont mutuellement indépendants

Contre Exemple

On lance deux dès de couleurs différentes, l'un noire et l'autre rouge

1. Donner card(Ω)
2. A : face du dé noir est paire. Donner p(A)=1/2
3. B : face du dé rouge est impaire. Donner p(B)=1/2
4. C : les deux faces sont paires. Donner p(C)=1/4
5. D: les deux faces sont même parité. Donner p(D)=1/2
6. Donner p(A⋂B)=1/4
7. Montrer que A et B sont indépendants
8. Calculer p(A⋂D) et en déduire que A et D sont indépendants
9. Calculer p(B⋂D) et en déduire que B et D sont indépendants
10. Conclure que A,B,D sont deux à deux indépendants
11. Calculer p(A⋂B⋂D) et en déduire que A, B et D ne sont pas mutuellement indépendants

Solution

1. card(Ω)=36
2. A : face du dé noir est paire.
   Les cas favorables sont des couples (i,j) tq i=pair et j qlq.
   Il s'agit d'une liste à deux cases sans répétitions :
   case 1=3 cas, case 2=6 cas. Total =18, p(A)=18/36=1/2
3. Les cas favorables sont des couples (i,j) tq i=qlq et j impaires. Il s'agit d'une liste à deux cases sans répétitions : case 1=6 cas, case 2=3 cas. Total =18, p(B)=18/36=1/2
4. Les cas favorables sont des couples (i,j) tq i=pair et j pair. Il s'agit d'une liste à deux cases sans répétitions : case 1=3 cas, case 2=3 cas. Total =9, p(C)=9/36=1/4
5. Les cas favorables sont des couples (i,j) tq (i=pair et j pair) ou bien (i=impair et j impair.) Il s'agit de deux liste à deux cases sans répétitions :
   liste 1 : case 1=3 cas, case 2=3 cas. liste 2 : case 1=3 cas, case 2=3 cas. Total =18, p(D)=18/36=1/2
6. A⋂B : face du dé noir est paire et face du dé rouge est impaire.
   case 1=3 cas, case 2=3 cas. Total =9. donc p(A⋂B)=9/36=1/4
7. p(A⋂B)=9/36=1/4=1/2.1/2=p(A).p(B). Donc A et B indépendants.
8. A⋂D : face du dé noir est paire et les deux faces sont même parité. Noir=pair er rouge=paire, case 1=3 cas, case 2=3 cas. Total =9.p(A⋂D)=9/36. p(A⋂D)=9/36=1/4=p(A).p(D). Donc A et D indépendants.

9. $B \cap D$: face du dé rouge est impaire et les deux faces sont même parité. Noir=impair et rouge=impaire, case 1=3 cas, case 2=3 cas. Total =9. $p(B \cap D)=9/36$ et $p(B \cap D)=9/36=1/4=p(B).p(D)$. Donc B et D indépendants.
10. **Conclusion 1 : A, B et D sont deux à deux indépendants**
11. $A \cap B \cap D$: face du dé noir est paire, face du dé rouge est impaire et les deux faces sont même parité.
    Impossible, donc $A \cap B \cap D = \emptyset$, $p(A \cap B \cap D)=0 \neq p(A).p(B).p(D)$
    Conclusion 2 : A, B et D ne sont pas mutuellement indépendants