

Séries numériques

Résumé de Cours

Blague du jour :

- Qu'est ce que crie un escargot sur le dos d'une tortue?
Réponse : Yaaaaaaaaahoo!!!
- Que dit un hérisson qui se cogne un cactus?
Réponse : maman!
- Quel est l'animal le plus heureux?
Réponse : Le hiboux. Parce que sa femme s'appelle chouette.

Personnalité du jour

Banach
 Stefan Banach (1892 - 1945) est un mathématicien polonais. Pendant la guerre, il est réformé, travaille à la construction de routes et suit à l'Université les leçons de mathématiques. Avec Steinhaus, il fonda plusieurs revues mathématiques en Pologne. Il est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Ses autres travaux touchent à la théorie de la mesure de l'intégration, de la théorie des ensembles et des séries orthogonales, il a notamment donné son nom aux espaces dits de Banach.

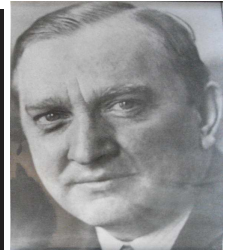


Table des matières

1	Séries numériques.	2
1.1	Convergence.	2
1.2	Convergence absolue.	2
1.3	Séries termes positifs : règles de convergence.	3
1.4	Séries alternées	5
2	Séries dans un espace vectoriel normé	5
2.1	Convergence.	5
3	Familles sommables	6
3.1	Ensembles dénombrables	6
3.2	Familles dénombrables à termes positifs	6
3.3	Familles dénombrables à valeurs dans un espace vectoriel normé	7
3.4	Autres modes de sommation.	7
4	Sommation dans un algèbre normée.	8

1 Séries numériques.

1.1 Convergence.

Définition 1 .

On appelle *série numérique* $(\sum x_n)$ de *terme général* x_n , réel ou complexe, la suite de *terme général* $S_n = x_0 + \dots + x_n$, appelée *somme partielle*.

La *série converge* si la suite des *sommes partielles* converge.

La limite S s'appelle *somme de la série* et se note $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

La quantité $R_n = S - S_n$ s'appelle *reste de rang* n .

Remarque 1

– *CN de la convergence* : Si une série numérique converge, alors son terme général tend vers 0, la réciproque n'est pas toujours vraie. Contre exemple : $\sum \frac{1}{n}$.

– *CNS de la convergence* : la série $(\sum_n x_n)$ converge si et seulement si la suite (S_n) est de Cauchy.

Remarque 2 .

– L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.

En particulier si deux séries $(\sum_n x_n)$ et $(\sum_n y_n)$ sont convergentes, $(\sum_n (x_n + y_n))$ est aussi convergente avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

– Une série complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$ converge si et seulement si les séries réelles de terme général x_n et y_n convergent.

– La suite géométrique $(\sum a^n)$ converge si et seulement si $|a| < 1$, avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

1.2 Convergence absolue.

Définition 2 .

On dit que la série $(\sum x_n)$ converge absolument quand la série $(\sum |x_n|)$ converge.

Théorème 1 *Inégalité triangulaire*

Toute série $(\sum x_n)$ qui converge absolument est convergente avec

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$$

Remarque 3 .

La réciproque de ce théorème est en général fautive. La série alterne $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge sans converger absolument, on dit qu'elle est *semi-convergente*.

Théorème 2 .

Soit $(\sum_n x_n)$ et $(\sum_n y_n)$ deux séries absolument convergentes, alors la série de terme général z_n défini par la relation

$$z_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} \quad \text{Produit de convolution de Cauchy}$$

(on écrit en général $(z_n) = (x_n) * (y_n)$) est absolument convergente, avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n \right)$$

1.3 Séries termes positifs : règles de convergence..

Dans tout ce paragraphe (sauf mention du contraire), les séries considérées x_n et y_n sont termes positifs.

Règle 1 .

La série $(\sum_n x_n)$ termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles $(S_n = \sum_{k=1}^n x_k)$ est majorée.

Règle 2 . règles de comparaison.

Si $0 \leq x_n \leq y_n$ PCR ou si $x_n = 0(y_n)$ ou bien si $x_n = o(y_n)$, alors :

- 1) $\left(\sum_n y_n \right)$ converge $\implies \left(\sum_n x_n \right)$ converge.
- 2) $\left(\sum_n x_n \right)$ diverge $\implies \left(\sum_n y_n \right)$ diverge.

Règle 3 . règles de comparaison logarithmique.

On pose $w_n = \frac{x_n}{y_n}$. Si (w_n) est croissante, en particulier si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} < 1$, alors :

- 1) $\left(\sum_n y_n \right)$ converge $\implies \left(\sum_n x_n \right)$ converge.
- 2) $\left(\sum_n x_n \right)$ diverge $\implies \left(\sum_n y_n \right)$ diverge.

Règle 4 . règle d'équivalence.

Si $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$, alors

- 1) $\left(\sum_n y_n \right)$ converge $\implies \left(\sum_n x_n \right)$ converge, dans ce cas $\sum_{k=n}^{+\infty} x_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} y_k$.
- 2) $\left(\sum_n y_n \right)$ diverge $\implies \left(\sum_n x_n \right)$ converge, dans ce cas $\sum_{k=0}^n x_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n y_k$.

Règle 5 . règle de comparaison avec une intégrale.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante vers 0 l'infini, alors :

$\left(\sum_{(} f_{(} \right) n$ converge $\iff f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Remarque 4 .

1) séries de Riemann : $\left(\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2) séries de Bertrand : $\left(\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$
ou
 $\alpha = 1, \beta > 1$

Règle 6 . règle de D'Alembert.

On cherche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, et on distingue les cas suivants :

1) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, alors $\left(\sum_n x_n \right)$ converge.

2) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, alors $\left(\sum_n x_n \right)$ diverge.

3) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, on ne peut rien dire.

Règle 7 . règle de Cauchy.

On cherche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n}$, et on distingue les cas suivants :

1) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, alors $\left(\sum_n x_n \right)$ converge.

2) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, alors $\left(\sum_n x_n \right)$ diverge.

3) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, on ne peut rien dire.

Règle 8 . règle condensation de Cauchy.

Si (x_n) est suite décroissante, alors :

$\left(\sum_n x_n \right)$ diverge $\iff \left(\sum_n 2^n x_{2^n} \right)$ converge.

Remarque 5 .

1) Toutes les règles précédentes sont applicable pour les séries termes positifs, toute fois on peut les appliquer dans le cas général, mais pour étudier la convergence absolue.

2) La règle suivante est applicable dans le cas général (même complexe), et permet de ramener l'étude d'une série semi-convergente celle d'une série absolument convergente.

Règle 9 . Transformation d'Abel.

Soit $(x_n), (y_n)$ deux suites complexes, alors :

$$\sum_{k=1}^n x_k (y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) y_k + x_n y_n - x_1 y_0$$

Remarque 6 .

- 1) La transformation d'Abel est aussi connue sous le nom de sommation par parties, vu sa ressemblance avec le principe d'intégration par parties.
- 2) Si (ε_n) est une suite réelle strictement décroissante vers 0 et (z_n) une suite complexe, dont la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n z_k$ est bornée, alors la série $\left(\sum_n \varepsilon_n z_n\right)$ est convergente.

1.4 Séries alternées

Définition 3 .

On appelle série alternée toute série réelle dont le terme général change de signe donc de la forme $(-1)^n x_n$ où x_n garde un signe constant.

Théorème 3 Critère spécial de Leibniz pour les Séries alternées

Soit $\sum (-1)^n x_n$ une série alternée telle que $|x_n|$ décroît vers 0, alors la série $\sum (-1)^n x_n$ converge. avec :

- R_n est du même signe que son premier terme $(-1)^{n+1} x_{n+1}$.
- $|R_n| \leq |x_{n+1}|$.
- La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x_n$ est comprise entre les sommes partielles S_{2n} et S_{2n+1} .

2 Séries dans un espace vectoriel normé

2.1 Convergence.

Définition 4 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E . On dit que la série $\sum x_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n = \sum_{k=0}^n x_k)$ converge dans E , sa

limite s'appelle somme de la série et se note $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$, ainsi on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

Théorème 4 Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, alors $\sum x_n$ converge si et seulement si S_n est de Cauchy.

Remarque 7 Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et si $\sum x_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Définition 5 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E . On dit que la série $\sum x_n$ converge absolument si la série $\sum \|x_n\|$.

Théorème 5 Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach et si $\sum x_n$ converge absolument, alors elle converge, avec

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$$

Théorème 6 Soit $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

1) Si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent, alors $\sum (x_n + y_n)$ converge, avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

2) Si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent absolument, alors $\sum (x_n + y_n)$ converge absolument, avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n + y_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| + \sum_{n=0}^{+\infty} \|y_n\|$$

3 Familles sommables

3.1 Ensembles dénombrables

Définition 6 Un ensemble \mathcal{I} est dit dénombrable, s'il existe une injection $\sigma : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{N}$.

Remarque 8

- Un ensemble est dénombrable s'il est équipotent (en bijection) avec une partie de \mathbb{N} ;
- Tout ensemble fini est dénombrable ;
- Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable ;
- La réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable ;
- Le produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- \mathbb{N}, \mathbb{Z} et \mathbb{Q} sont dénombrables, mais $\overline{\mathbb{Q}}$ et \mathbb{R} ne sont pas dénombrables.

Proposition 1

- Tout ensemble dénombrable \mathcal{I} peut être muni d'une relation d'ordre totale.
- Tout ensemble dénombrable \mathcal{I} admet une suite de partie $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{I}$ (dite exhaustive), vérifiant la

$$\text{propriété suivante } \begin{cases} \mathcal{I}_n \subset \mathcal{I}_{n+1} \\ \mathcal{I} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{I}_n \end{cases} .$$

Théorème 7 Si \mathcal{I} est un ensemble dénombrable et (\mathcal{I}_n) une suite exhaustive de \mathcal{I} , alors pour toute partie finie $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, il existe une partie \mathcal{I}_k tel que $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_k$.

3.2 Familles dénombrables à termes positifs

Dans toute cette partie, on considère \mathcal{I} un ensemble dénombrable et $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$ une famille dénombrable de réels positifs.

Définition 7 On dit que $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$ est sommable si et seulement si $\exists M > 0$ tel que $\sum_{k \in \mathcal{J}} x_k \leq M$ pour toute partie finie $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$. On appelle alors somme de la famille $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$, le réel noté $\sum_{k \in \mathcal{I}} x_k$ défini par

$$\sum_{k \in \mathcal{I}} x_k = \sup_{\mathcal{J} \subset \mathcal{I}, \text{fini}} \sum_{k \in \mathcal{J}} x_k$$

Théorème 8

- Si il existe une suite exhaustive $(\mathcal{I}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{I} telle que la suite $\left(\sum_{k \in \mathcal{I}_n} x_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors la famille $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$ est sommable, avec $\sum_{k \in \mathcal{I}} x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathcal{I}_n} x_k$
- Si la famille $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$ est sommable, alors pour suite exhaustive $(\mathcal{I}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{I} la suite $\left(\sum_{k \in \mathcal{I}_n} x_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, avec $\sum_{k \in \mathcal{I}} x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathcal{I}_n} x_k$.

Proposition 2 Si les familles $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$ et $(y_k)_{k \in \mathcal{I}}$ sont sommables, alors la famille $(x_k + y_k)_{k \in \mathcal{I}}$ est sommable, avec $\sum_{k \in \mathcal{I}} (x_k + y_k) = \sum_{k \in \mathcal{I}} x_k + \sum_{k \in \mathcal{I}} y_k$

3.3 Familles dénombrables à valeurs dans un espace vectoriel normé

Dans toute cette partie, on considère \mathcal{I} un ensemble dénombrable et $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$ une famille dénombrable à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Définition 8 On dit que la famille $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$ est absolument sommable quand la famille $(\|x_k\|)_{k \in \mathcal{I}}$ est sommable

Théorème 9 Si $(E, \|\cdot\|)$ est un Banach et si $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$ est absolument sommable, alors pour suite exhaustive $(\mathcal{I}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{I} , on a la suite $\left(\sum_{k \in \mathcal{I}_n} x_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, dont limite ne dépend pas du choix de la suite exhaustive, on appelle somme de la famille $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$, l'élément de E , noté $\sum_{k \in \mathcal{I}} x_k$ défini par $\sum_{k \in \mathcal{I}} x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathcal{I}_n} x_k$.

Corollaire 1 Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est absolument sommable si et seulement si la série $\sum x_n$ converge absolument. Dans le cas où E est un Banach, les sommes relatives aux deux notions sont identiques, i.e : $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Corollaire 2

- Si $(E, \|\cdot\|)$ est un Banach et si $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$ et $(y_k)_{k \in \mathcal{I}}$ sont absolument sommables, alors pour tout scalaire λ , on a : $(x_k + \lambda y_k)_{k \in \mathcal{I}}$ est absolument sommable, avec $\sum_{k \in \mathcal{I}} (x_k + \lambda y_k) = \sum_{k \in \mathcal{I}} x_k + \lambda \sum_{k \in \mathcal{I}} y_k$.
- Une famille dénombrable de réels $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$ est absolument sommable si et seulement si les familles $(x_k^+)_{k \in \mathcal{I}}$ et $(x_k^-)_{k \in \mathcal{I}}$ sont absolument sommables, dans ce cas $\sum_{k \in \mathcal{I}} x_k = \sum_{k \in \mathcal{I}} x_k^+ - \sum_{k \in \mathcal{I}} x_k^-$.
- Une famille dénombrable de complexes $(z_k)_{k \in \mathcal{I}}$ est absolument sommable si et seulement si les familles $(\operatorname{Re} z_k)_{k \in \mathcal{I}}$ et $(\operatorname{Im} z_k)_{k \in \mathcal{I}}$ sont absolument sommables, dans ce cas : $\sum_{k \in \mathcal{I}} z_k = \sum_{k \in \mathcal{I}} \operatorname{Re} z_k + i \sum_{k \in \mathcal{I}} \operatorname{Im} z_k$.

3.4 Autres modes de sommation.

Définition 9 Une série d'un espace vectoriel normé $\sum x_n$ est dite commutativement convergente si et seulement si la série de terme général $(x_{\sigma(n)})$ converge pour toute bijection, $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Théorème 10 Toute série absolument convergente à termes dans un espace de Banach est commutativement convergente.

Définition 10 Une famille $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$ d'un espace vectoriel normé est dite sommable par paquets si et seulement si pour toute partition dénombrable $(\mathcal{I}_n)_{n \in \mathcal{J}}$ de \mathcal{I} , les familles suivantes sont dénombrables : $(x_k)_{k \in \mathcal{I}_n}$ et $(y_n)_{n \in \mathcal{J}}$ où $y_n = \sum_{k \in \mathcal{I}_n} x_k$.

Théorème 11 Toute famille $(x_k)_{k \in \mathcal{I}}$ sommable à termes dans un espace de Banach est sommable par paquets, dans ce cas pour toute partition dénombrable $(\mathcal{I}_n)_{n \in \mathcal{J}}$ de \mathcal{I} , on a :

$$\sum_{k \in \mathcal{I}} x_k = \sum_{n \in \mathcal{J}} \left(\sum_{k \in \mathcal{I}_n} x_k \right)$$

Théorème 12 Si $(x_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est une suite double absolument sommable à termes dans un espace de Banach, alors les sommes suivantes existent et sont égales :

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} x_{p,q} &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} x_{p,q} \right) \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} x_{p,q} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} x_{p,q} \right) \end{aligned}$$

4 Sommation dans un algèbre normée.

Dans toute cette partie $(A, \|\cdot\|)$ est une algèbre normée de Banach.

Théorème 13 Si $a \in A$ tel que $\|a\| < 1$, alors $\sum a^k$ converge absolument, $1_A - a$ est inversible avec $(1_A - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$

Corollaire 3 Soit E est un \mathbb{R} ou \mathbb{C} espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}_c(E)$, alors $\text{Sp}(u) \subset B(0, \|u\|)$.

Corollaire 4 On note par \mathcal{U} l'ensemble des éléments inversibles de A , alors \mathcal{U} est un ouvert et l'application $a \mapsto a^{-1}$ est un homéomorphisme de \mathcal{U} vers lui même.

Théorème 14 Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors la série de terme général $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$ converge absolument, avec $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} u_p v_q \right)$

Corollaire 5 Pour tout $a \in A$, la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge absolument, sa somme s'appelle exponentielle de a et se note e^a , on en particulier $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

Fin
À la prochaine