My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُونِي مُولَاي اسمَاعِيل

MATH PrEPaS

MP

Suites & Séries de Fcts

Les Astuces & Les Classiques

Les Annales

Classique 1 : Théorème de Stone Weirstrass

Théorème de Stone Weirstrass

Si f: [a,b] $\rightarrow$ IR continue, Alors il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur [a,b]

Remarque

Résultat du cours, dont la démonstration est admise

Partie I : Polynômes de Bernstein

$B_k(X)=C_n^k X^k(1-X)^{n-k}$, $0\leq k\leq n$

1. Montrer que $B=(B_k(X))_{0\leq k\leq n}$ est une base de $IR_n[X]$
2. Montrer que $\Sigma_{0\leq k\leq n}B_k(X)=1$
3. Montrer que $\Sigma_{0\leq k\leq n}\, kB_k(X)=nX$

   Indication : $kC_n^k = kC_{n-1}^{k-1}$
4. Montrer que $\Sigma_{0\leq k\leq n}\, k(k-1)B_k(X)=n(n-1)X^2$
5. En déduire que $\Sigma_{0\leq k\leq n}\, k^2B_k(X)=nX(1+(n-1)X)$

   Indication : $k^2=k(k-1)+k$
6. En déduire que $\Sigma_{0\leq k\leq n}\,(k-nX)^2B_k(X)=nX(1-X)$

Partie II : Demo de Stone Weirstrass

Si f: [0,1] $\rightarrow$ IR continue

On pose $P_n(x)=\Sigma_{0\leq k\leq n}\, f(k/n)B_k(x)$: Polynôme de Bernstein de f

1. Vérifier que $\Sigma_{0\leq k\leq n}\, f(x)B_k(x)=f(x)$
2. En déduire que $|f(x) - P_n(x)| \leq \Sigma_{0\leq k\leq n} \left|f(x)-f(k/n)\right| \left|B_k(x)\right|$
3. Rappeler la définition de uniformément continue
4. Justifier que f est uniformément continue

   On pose $I=\{0\leq k\leq n \text{ tq } |x-k/n| \leq \zeta\}$ et $J=\{0\leq k\leq n \text{ tq } |x-k/n| > \zeta\}$

   $S_1=\Sigma_{k\in I} \left|f(x)-f(k/n)\right| \left|B_k(x)\right|$ et $S_2=\Sigma_{k\in J} \left|f(x)-f(k/n)\right| \left|B_k(x)\right|$
5. Justifier que $|f(x) - P_n(x)| \leq S_1 + S_2$
6. Montrer que $S_1 \leq \varepsilon / 2$
7. Montrer que $x(1-x)\leq 1/4$, $\forall\, x \in [0,1]$
8. En déduire que $S_2 < M/n$ où M=cte = déterminer

   Indication : $k\in J \Rightarrow \left|B_k(x)\right| < \left|B_k(x)\right| |nx-k| / (n\zeta)$

10. Conclure que (P_n) converge uniformément vers f sur [0,1]

Partie III : VARIOUS

1. On muni $E=\{f : [0,1] \to IR \text{ continue}\}$ du $<P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)dt$
   On pose $F=IR[X]$
   1. Montrer que $F^{\perp}=\{0_E\}$
   2. En déduire que les relation $F^{\perp\perp}=F$ et $F\oplus F^{\perp} = E$
2. $f : IR\to IR$ continue, et on suppose que il existe (P_n) converge uniformément vers f sur IR
   1. Montrer que $\exists N$ tq $(P_n - P_N)$ est bornée à partir de $n\geq N$
   2. En déduire que à partir de $n\geq N$ $P_n = P_N + \lambda_n$
   3. Justifier que $\lambda_n \to 0$
   4. f est une fonction polynomiale
   5. En déduire que de S.W n'est pas vrai sur IR
3. Soit $E=\{f : I \to IR \text{ continue}\}$ où I intervalle de IR
   On munit E de la norme $\| . \|_\infty$
   1. Montrer que IR[X] est dense dans $(E, \| . \|_\infty)$ quand $I=[a,b]$
   2. Montrer que IR[X] est fermé dans $(E, \| . \|_\infty)$ quand $I=IR$

Solution

Partie I

1. Libre ? :
   $\sum_{0\leq k\leq n} a_kB_k(X)= 0 \Rightarrow \sum_{0\leq k\leq n} a_k C_n^k X^k(1-X)^{n-k}=0$
   $\Rightarrow a_0(1-X)^n + a_1nX(1-X)^{n-1}+ ...+ a_nX^n =0$
   Pour X=1, $a_n=0$
   Donc $a_0(1-X)^n + a_1nX(1-X)^{n-1}+ ...+a_{n-1}\, nX^{n-1}(1-X)=0$
   On simplifie par (1-X) car IR[X] est intégre
   Donc $a_0(1-X)^{n-1} + a_1nX(1-X)^{n-2}+ ...+a_{n-1}\, nX^{n-1}=0$
   Et par récurrence on conclut que les autres $a_k=0$
   Or card (B)=n+1 =dim $IR_n[X]$, donc B base de $IR_n[X]$
2. $\sum_{0\leq k\leq n}B_k(X)=\sum_{0\leq k\leq n} C_n^kX^k(1-X)^{n-k} =(X + 1-X)^n$
3. $\sum_{0\leq k\leq n} kB_k(X)=\sum_{1\leq k\leq n} k\, C_n^kX^k(1-X)^{n-k}$
   $=n\sum_{1\leq k\leq n} C_{n-1}^{k-1}X^k(1-X)^{n-k}$
   $=n\sum_{0\leq k\leq n-1} C_{n-1}^kX^{k+1}(1-X)^{n-1-k}$
   $=nX\sum_{0\leq k\leq n-1} C_{n-1}^kX^k(1-X)^{n-1-k} =nX$
4. Utiliser $k(k-1)C_n^k =n(k-1)C_{n-1}^{k-1} =n(n-1)\, C_{n-2}^{k-2}$
5. Utiliser : $k^2 C_n^k=k(k-1)C_n^k+ kC_n^k$
6. En déduire que $\sum_{0\leq k\leq n} (k-nX)^2B_k(X)=nX(1-X)$

Partie II : Demo de Stone Weirstrass

Si f: $[0,1] \to$ IR continue,

On pose $P_n(x)=\sum_{0\leq k\leq n} f(k/n)B_k(x)$: Polynôme de Bernstein de f

1. $\sum_{0\leq k\leq n} f(x)B_k(x)=f(x). \sum_{0\leq k\leq n} B_k(x) = f(x)$
2. $|f(x) - P_n(x)| = |\sum_{0\leq k\leq n} f(x)B_k(x) - \sum_{0\leq k\leq n} f(k/n)B_k(x)|$

   $\leq\sum_{0\leq k\leq n} \left|f(x)-f(k/n)\right| \left|B_k(x)\right|$
3. $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\zeta>0)$ tq $|x-y|\leq\zeta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon / 2$
4. Toute fonction continue sur un segment (sur un compact en général) f est uniformément continue

   $S_1=\sum_{k\in I} \left|f(x) - f(k/n)\right| \left|B_k(x)\right|$ $S_2=\sum_{k\in J} \left|f(x)-f(k/n)\right| \left|B_k(x)\right|$
5. $|f(x) - P_n(x)| \leq \sum_{0\leq k\leq n} \left|f(x)-f(k/n)\right| \left|B_k(x)\right| = S_1 + S_2$

   car $S_1=\sum_{k\in I} \left|f(x)-f(k/n)\right| \left|B_k(x)\right|$ et $S_2=\sum_{k\in J} \left|f(x)-f(k/n)\right| \left|B_k(x)\right|$
6. $k\in I \Rightarrow |x-k/n| \leq \zeta \Rightarrow |f(x) - f(k/n)| \leq \varepsilon / 2$

   $S_1 = \sum_{k\in I} \left|f(x)-f(k/n)\right| \left|B_k(x)\right| \leq (\varepsilon / 2). \sum_{k\in I} \left|B_k(x)\right|$

   $=(\varepsilon / 2). \sum_{k\in I} B_k(x)$ car $0\leq x\leq 1$

   $\leq (\varepsilon / 2). \sum_{k=0}^{n} B_k(x)$
7. Étude de fcts => $x(1-x)\leq 1/4$, $\forall x \in [0,1]$
8. On sait que

   $k\in J \Rightarrow |x-k/n| > \zeta \Rightarrow |nx-k|^2 > n^2\zeta^2 \Rightarrow |nx-k|^2 |B_k(x)| > n^2\zeta^2 |B_k(x)|$

   $\Rightarrow |B_k(x)| < |nx-k|^2 |B_k(x)| / (n^2\zeta^2)$ (on divise par $n\zeta$)

   D'autre part $\left|f(x)-f(k/n)\right| \leq \left|f(x)\right| + \left|f(k/n)\right| \leq 2. \|f\|_\infty$

   Ainsi

   $S_2=\sum_{k\in J} \left|f(x)-f(k/n)\right| \left|B_k(x)\right| < 2 \|f\|_\infty\sum_{k\in J}\left|B_k(x)\right|$

   $< 2 \|f\|_\infty / (n^2\zeta^2) \sum_{k\in J} |nx-k|^2 |B_k(x)|$

   $< 2 \|f\|_\infty / (n^2\zeta^2) \sum_{0\leq k\leq n} |nx-k|^2 |B_k(x)|$

   $= 2 \|f\|_\infty / (n^2\zeta^2) (nx(1-x)) = 2 \|f\|_\infty / (n\zeta^2)(x(1-x))$

   $\leq 2 \|f\|_\infty / (n\zeta^2)/ 4 = M/ n$ où $\|f\|_\infty / (2\zeta^2)$
9. En résumé : pour tout x dans [0,1], on a

   $|f(x) - P_n(x)| \leq S_1 + S_2 \leq \varepsilon / 2 + M/n$

   $M/n \to 0$, donc $M/n\leq \varepsilon / 2$ à partir d'un certain rang

   Donc $\|f - P_n\|_\infty \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang

   D'où la convergence uniforme

Classique 2 : Théorèmes de Dini

Théorèmes de Dini
Si (f_n) est une suite qui converge simplement vers f sur I
Alors en ajoutant une condition (*)
La convergence devient uniforme

Théorème de Dini 1
Si (P_n) est une suite qui de polynômes de degrés tous ≤ N qui converge simplement
Alors (P_n) converge uniformément

Partie I : Polynômes de Lagrange
On prend $a_0, \dots, a_N$ des réels qlq deux à deux distincts
$L_i(X)$ les polynômes de Lagrange associés

1. Rappeler la forme de $L_i(X)$
2. Rappeler la valeur de $L_i(x_j)$
3. En déduire que $(L_0, \dots, L_N)$ est une base $IR_N[X]$
4. En déduire que $\forall P \in IR_N[X]$, $P(X)=\sum_{i=0}^{N} P(x_i)L_i(X)$

Partie II : Dini (versions faible)
Montrons que toute suite (f_n) de fcts qui converge simplement sur un ensemble fini I= { $a_0, \dots, a_N$ } converge uniformément sur I

Partie III : Dini (versions 1)
Si (P_n) est une suite qui de polynômes de degrés tous ≤ N qui converge simplement
On prend I={$a_0, \dots, a_N$ }des réels qlq deux à deux distincts
$L_i(X)$ les polynômes de Lagrange associés

1. Justifier que (P_n) converge uniformément sur I
2. Montrer que P=lim $P_n \in IR_N[X]$
3. En déduire que la converge de P_n sur IR est uniforme

Solution

Partie I

1. $L_i(X)= \prod_{j\neq i} (X-a_j)\ (a_i-a_j)$
2. $L_i(x_j)=\delta_{ij}$
3. Posons $B=(L_0, ..., L_N)$, comme $card(B)=N+1= \dim IR_N[X]$
   Montrons que $B=(L_0, ..., L_N)$ est libre $IR_N[X]$
   En effet, supposons $a_0L_0 (X)+ ...+ a_NL_N(X)=0$
   Pour $X=x_j$, on obtient $a_0L_0 (x_j)+ ...+a_jL_j(x_j)+ ...+ a_NL_N(x_j)=0$
   Or $L_i(x_j)=\delta_{ij,}$ donc $a_j=0, \forall j$
4. On a $B=(L_0, ..., L_N)$ est libre $IR_N[X]$
   $\forall P\in IR_N[X], P(X)=\sum_{i=0}^{N} a_iL_i(X)$
   Pour $X=x_j$, on obtient $P(x_j)=a_0L_0 (x_j)+ ...+a_jL_j(x_j)+ ...+ a_NL_N(x_j)$
   Or $L_i(x_j)=\delta_{ij,}$ donc $P(x_j)= a_j, \forall j$

Partie II : Dini (version faible)

Soit une suite (f_n) de fcts qui converge simplement sur $I= \{ a_0, ..., a_N \}$
Pour chaque xk (fixe) $fn(i) \to f(xi)$
$\forall \varepsilon>0, \exists\ n_k$ tq $\forall n\geq n_k$, on a $||f_n(x_i) - f(x_i)||\leq \varepsilon$
Prenons $m=\max (n_k)$, alors $\forall n\geq n_k$, on a $||f_n(x) - f(x)||\leq \varepsilon, \forall x= a_i \in I$
Donc $||f_n- f||_{\infty,I}\leq \varepsilon$, d'ou la convergence uniforme

Partie III : Dini (version 1)

1. Découle de la partie II : $||P_n- P||_{\infty,I}\leq \varepsilon$
2. Posons $P_n(X)=\sum_{i=0}^{N}P_n(x_i)L_i(X)$
   $P(X)=\lim P_n (X)= \lim \sum_{i=0}^{N}P_n(x_i)L_i(X) = \sum_{i=0}^{N} \lim P_n(x_i)L_i(X)$
   $=\sum_{i=0}^{N} \lim P(x_i)L_i(X) \in IR_N[X]$
3. $P_n(X)-P(X)=\sum_{i=0}^{N}P_n(x_i)L_i(X)–\sum_{i=0}^{N}P_n(x_i)L_i(X)$
4. Donc $|P_n(X)-P(X)|=|\sum_{i=0}^{N} \big(P_n(x_i)– P_n(x_i)\big)L_i(X) |$
5. $\leq|\sum_{i=0}^{N} |P_n(x_i)– P_n(x_i)|. |L_i(X) | \leq\sum_{i=0}^{N} ||P_n- P||_{\infty,I}. ||L_i ||_{\infty,I}$
   Donc $||P_n-P||_{\infty,IR} \leq K.||P_n- P||_{\infty,I} \leq K.\varepsilon$ où $K=\sum_{i=0}^{N} ||L_i ||_{\infty,I}$

Classique 3 : Séries de Fourier (CNC MP, 2019)

Classique 4 : Fonctions de Riemann

Partie I : Fonction dzeta

On pose $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$ et $\eta(x)=\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^x$

1. Montrer que $\zeta(x)$ converge simplement sur $]1, +\infty[$
2. Vérifier que cette converge n'est pas uniforme sur $]1, +\infty[$
3. Montrer que $\zeta(x)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a>1$
4. En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x) = 1$
5. En déduire que $x \to \zeta(x)$ est continue sur $]1, +\infty[$
6. Montrer que $x \to \zeta(x)$ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$
   Donner $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $x>1$
7. Vérifier que $x \to \zeta(x)$ est décroissante convexe sur $]1, +\infty[$
8. Montrer que $\zeta(x) \sim 1/(x-1)$ quand $x \to 1$
9. En déduire que $\lim_{x\to 1}\zeta(x) =+\infty$
10. En déduire l'allure de la courbe de $\zeta(x)$

Solution

Rappel : Comparaison série intégrale (version séries numériques)

Si $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue positive décroissante tq $\lim_{+\infty} f=0$, alors

- $\sum_{n\geq a} f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature
- $\int_a^{b+1} f(t)dt \leq \sum_{n=a}^{n=b} f(n) \leq \int_{a-1}^{b} f(t)dt$
- $R_n=\sum_{n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$

Rappel : Comparaison série intégrale (version séries de fcts)

Si pour x fixé dans $[a,+\infty[$, on prend $t=n$ et $f_t(x)=f_n(x)$

$t\in [a,+\infty[\to f_t(x)$ continue positive décroissante tq $\lim_{t\to+\infty} f_t(x)=0$, alors

- $\sum_{n\geq a} f_n(x)$ et $\int_a^{+\infty} f_t(x)\,dt$ sont de même nature
- $\int_a^{b+1} f_t(x)dt \leq \sum_{n=a}^{n=b} f_n(x) \leq \int_{a-1}^{b} f_t(x)dt$
- $R_n=\sum_{n+1}^{+\infty} f_n(x) \leq \int_n^{+\infty} f_t(x)dt$

Solution Partie I : Fonction dzeta

On pose $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$

1. Si pour x fixé dans]1, +∞[, on prend t=n
   $f_t(x)=f_n(x)=1/n^x =1/t^x$
   On a $\int_1^{+\infty} f_t(x)\, dt = \int_1^{+\infty} 1/t^x\, dt$ converge car $1/t^x = t^{-x}$
   Donc la primitive est $t^{-x+1} / (-x+1) \to 0$ quand $x \to +\infty$
2. sur]1, +∞[, on $\|1/n^x\|_\infty =1$ ne tend pas vers 0
   Autrement la suite $1/n^x$ ne converge pas uniformément vers 0
   Donc $\sum 1/n^x$ ne converge pas uniformément
3. $x \in [a, +\infty[\Rightarrow n^x \geq n^a \Rightarrow 1/ n^x \leq 1/n^a$
4. Or a>1, donc $\sum 1/n^a$ converge, donc $\zeta(x)$ converge normalement sur [a, +∞[pour tout a>1
5. $\sum 1/n^x$ converge normalement sur [a, +∞[, donc converge uniformément sur [a, +∞[
   Pour tout n∈IN fixé $\lim_{x\to+\infty} 1/n^x$
   Donc d'après le théorème de passage à la limite sous le signe somme
   On a $\lim_{x\to+\infty}\sum 1/n^x$, $\sum \lim_{x\to+\infty} 1/n^x$ et sont égales
   En particulier $\lim_{x\to+\infty} 1/n^x = 0$ si n≥1 et $\lim_{x\to+\infty} 1/n^x = 1$ si n=0
   $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x) =\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^x=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} 1/n^x = 1$
6. Pour tout n∈IN fixé, $x\to 1/n^x$ est continue sur tout [a, +∞[⊂]0,+∞[
   $\sum 1/n^x$ converge normalement sur tout [a, +∞[⊂]0,+∞[, donc converge uniformément sur [a, +∞[
   Donc d'après le théorème de continuité de la somme uniforme
   On a $x\to \zeta(x)$ est continue sur tout [a, +∞[⊂]0,+∞[, donc continue sur]0,+∞[
7. Pour tout n∈IN fixé, $x\to 1/n^x$ est de classe C^∞ sur tout [a, +∞[⊂]0,+∞[
   On sait que $a^x=e^{x.\ln a}$, donc
   Pour tout k∈IN, $(1/n^x)^{(k)} =(e^{-x.\ln n})^{(k)} = (-\ln n)^k . e^{-x.\ln n}$
   Donc sur [a, +∞[: $|(1/n^x)^{(k)}| = \ln n^k . e^{-x.\ln n} \leq \ln n^k . e^{-a.\ln n}$
   D'autre part $\sum \ln n^k . e^{-a.\ln n}$ est une série numérique cvge car
   $\ln n^k . e^{-a.\ln n} = o(1/n^2)$ avec $\sum 1/n^2$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\alpha=2>1$
   Donc $\sum (1/n^x)^{(k)}$ converge normalement sur [a, +∞[
   D'après le théorème des dérivations successives terme à terme

On peut dire que $x \to \zeta(x)$ est de classe C^∞ sur tout $[a, +\infty[\subset]0,+\infty[$, donc de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

avec $\zeta(x)^{(k)} = \left(\sum 1/n^x\right)^{(k)} = \sum \left(1/n^x\right)^{(k)} = \sum(-\ln n)^k.\ e^{-x.\ln n} = \sum(-\ln n)^k/n^x$

8. On a $\zeta(x)' = \sum(-\ln n)/n^x < 0$ donc ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$On a $\zeta(x)' = \sum(\ln n)^2/n^x > 0$ donc ζ est convexe sur $]1, +\infty[$
9.

Astuce : Équivalent d'une somme

Pour trouver l'équivalent d'une somme S, on procède comme suit

étape 1 : On utilise la règle de comparaison série-intégrale pour encadrer S entre deux intégrale I et J

étape 2 : On calcul I et J, puis on chercher un équivalent commun A à I et J

étape 3 : On conclut que S ~ A

$\int_a^{b+1} f(t)dt \leq \sum_{n=a}^{n=b} f(n) \leq \int_{a-1}^{b} f(t)dt$

D'après la la règle de comparaison série-intégrale

$I=\int_1^\infty 1/t^x\,dt \leq \zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty 1/n^x \leq J = \int_0^\infty 1/t^x\,dt$

$I=\int_1^\infty 1/t^x\,dt = \int_1^\infty t^{-x}\,dt = 1/(x-1)$

pour J il y a un problème en t=0 qui provient de n=1

Astuce : $\sum_{n=1}^\infty 1/n^x = 1 + \sum_{n=2}^\infty 1/n^x \leq 1 + \int_1^\infty 1/t^x\,dt = 1+1/(x-1)$

Ainsi $A=1/(x-1) \leq \zeta(x) \leq 1+1/(x-1) \sim 1/(x-1)$

Donc $\zeta(x) \sim 1/(x-1)$

10. $\zeta(x) \sim 1/(x-1)$ et $\lim_{x\to 1} 1/(x-1) = +\infty$, donc $\lim_{x\to 1} \zeta(x) = +\infty$
11. A faire

Partie II : Fonction eta

On pose $\eta(x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n/n^x$

1. Montrer que $\eta(x)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$
2. Vérifier que cette converge n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$
3. Montrer que $\eta(x)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a>0$
4. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \eta(x) = -1$
5. En déduire que $x \to \eta(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$
6. Montrer que $x \to \eta(x)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$
7. Donner $\eta^{(k)}(x)$ pour tout $x>0$

Partie III : Fonction dzeta vs. Eta

Soon