My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُونِي مُولَاي اسْمَاعِيل

MATH PrEPaS

MP

Séries de fonctions

Le Cours Complet
Les Astuces Concours

Objectifs

1. Maîtriser les méthodes d'études des convergence
2. Apprendre les théorèmes généraux d'interversion de signes (hypothèses et conclusions) et savoir les exploiter

Notations

Soit $f_n : I \rightarrow$ IR ou C et $f : I \rightarrow$ IR ou C avec I intervalle

Dans le cas $f_n : I \rightarrow E$ (evn) : remplacer $|\ .\ |$ par $||\ .\ ||$

On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n} f_k$: Sommes partielles

1. Convergence Simple et absolue

Définition 1

On dit que que la série $\sum_k f_k$ converge simplement<=>S_n converge simplement

Dans ce cas : S= $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ s’appelle somme de la série

Astuce

Pour montrer que $\sum_k f_k$ converge simplement vers f

- on fixe $x \in I$
- on montrer que la série $\sum_k f_k(x)$, en utilisant les technique des séries numériques (Séries usuelles, D’Alembert, les équivalents simples, les majorations, série-intégrales, CSSA)

Exemples

- $\sum_n x^n$ converge simplement sur I=]-1, 1[car série géométrique de raison $|x|<1$, avec $S(x)=1/(1-x)$
- $\sum_n 1/n^x$ converge simplement sur I=]1, +∞[car série de Riemann de raison x>1
- $\sum_n (-1)^n/n^x$ converge simplement sur I=]0, +∞[après le CSSA

Définition 2

On dit que que la série $\sum_k f_k$ converge absolument <=> la série $\sum_k |f_k|$ converge simplement

Théorème 1

la série $\sum_k f_k$ converge absolument => la série $\sum_k f_k$ converge simplement

Remarque

La réciproque du théorème n’est pas toujours vrai

Autrement dit: la convergence simple n’implique pas la convergence absolue

Contre Exemple

$\sum_n (-1)^n/n^x$ converge simplement sur I=]0, 1] mais pas absolument

2. Convergence uniforme

Définition

On dit que que $\Sigma_k\ f_k$ converge uniformément vers f <=> S_n converge uniformément

Théorème 1

$\Sigma_k\ f_k$ converge uniformément vers f => f_n converge uniformément vers 0

Demo

$\|f_n\|_\infty = \|S_n - S_{n-1}\|_\infty = \|(S_n - S) - (S_{n-1} - S)\|_\infty \leq \|(S_n - S)\|_\infty + \|(S_{n-1} - S)\|_\infty \to 0$

Astuce

Pour montrer que $\Sigma_k\ f_k$ ne converge pas uniformément, il suffit de montrer que f_n ne converge pas uniformément vers 0

Exemple

$f_n(x) = x^n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur I=]-1,1[,

Donc $\Sigma_n\ x^n$ ne converge pas uniformément sur I=]-1,1[

Théorème 2

$\Sigma_k\ f_k$ converge uniformément vers f => $\Sigma_k\ f_k$ converge simplement vers f

Remarque

La réciproque du théorème 2 n'est pas toujours vraie

cad $\Sigma_k\ f_k$ converge simplement vers f n'implique pas que $\Sigma_k f_k$ converge uniforme vers f

Contre Exemple

$\Sigma_n\ x^n$ converge simplement sur I=]-1, 1[avec S(x)=1/(1-x)

$\Sigma_n\ x^n$ ne converge pas uniformément sur I=]-1,1[

Astuce

Pour montrer que f_n converge uniformément vers f

Méthode 1 : Calcul du reste

- On montre $\sum_k f_k$ converge simplement
- On fixe $x\in I$, on pose $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$
- On calcule $R_n(x)$, puis on détermine $\|R_n\|_\infty$
- On montrer que lim $\|R_n\|_\infty =0$

Méthode 2 : Majoration du reste

- On montre $\sum_k f_k$ converge simplement
- On fixe $x\in I$, on pose $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$
- On majore $|R_n(x)| \leq \varepsilon_n$
- On vérifie que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n =0$

Astuce : Calcul du reste

Pour calculer le reste, on peut utiliser

- **Méthode 1** : les sommes usuelles
- **Méthode 2** : Formule de Taylor avec reste intégrale (CNC 2019,PSI)

Astuce : Majoration du reste par comparaison série-intégrale

Pour majorer le reste, on peut utiliser

Si pour $x\in I$, $f_x : [a,+\infty[\to IR$ définie par $f_x(t)=f_t(x)$ continue, positive, décroissante tq $\lim_{t\to+\infty} f_t(x)=0$

Alors $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ vérifie $|R_n(x)| \leq \int_n^{+\infty} f_x(t)\, dt =\varepsilon_n(x)$

Puis on cherche ε_n qui ne dépend pas de x tq $|\varepsilon_n(x)| \leq \varepsilon_n$

Puis on montrer que $\varepsilon_n \to 0$

Classique Concours : Dzeta de Riemann : $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^x$

$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^x$ de même nature que $\int_1^{+\infty} 1/t^x\, dt$ converge ssi $x>1$

Si pour $x\in I$, $f_x : [a,+\infty[\to IR$ définie par $f_x(t)= 1/t^x$ continue, positive, décroissante tq $\lim_{t\to+\infty} f_t(x)=0$

Alors $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} 1/n^x$ vérifie

$|R_n(x)| \leq \int_n^{+\infty} 1/t^x dt =\int_n^{+\infty} t^{-x} dt =n^{-x+1}/(x-1) =1/n^{x-1}(x-1) =\varepsilon_n(x)$

Astuce : Majoration du reste par le CSSA

Pour majorer le reste, on peut utiliser

Si pour $x \in I$, $f_n(x)$ décroissante par rapport à n tq $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$

Alors $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k f_k(x)$ vérifie $|R_n(x)| \leq \varepsilon_n(x)=|(-1)^{n+1}f_{n+1}(x)|$

Puis on cherche ε_n qui ne dépend pas de x tq $|\varepsilon_n(x)| \leq \varepsilon_n$

Puis on montrer que $\varepsilon_n \to 0$

Classique Concours : Eta de Riemann : $\eta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n/n^x$

pour $x>0$, $f_n(x)=1/n^x$ décroissante par rapport à n tq $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$

D'apres le CSSA, on a $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n/n^x$

avec $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^n/n^x$ vérifie

$|R_n(x)| \leq |(-1)^{n+1}/(n+1)^x| = |1/(n+1)^x| = \varepsilon_n(x)$

Sur $[1,+\infty[$: $|R_n(x)| \leq 1/(n+1) \to 0$, d'où convergence uniforme

3. Convergence Normale

Définition 2 : $\sum_k f_k$ converge normalement <=> la série $\sum_k \|f_k\|_\infty$ converge

Théorème 1

la série $\sum_k f_k$ converge normalement => la série $\sum_k f_k$ converge uniformément

la série $\sum_k f_k$ converge normalement => la série $\sum_k f_k$ converge absolument

Remarque : Les réciproque du théorème n'est pas toujours vrai.

- la convergence uniforme n'implique pas la convergence normale

  Contre Exemple: $\sum (-1)^n/n^x$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$

  Mais $\sum (-1)^n/n^x$ ne converge pas normalement sur $[1,+\infty[$

  car $\sum_n \|(-1)^n/n^x\|_\infty = \sum_n 1/n$ diverge
- la convergence absolue n'implique pas la convergence normale

  Contre Exemple: $\sum_n 1/n^x$ converge absolument sur $[1,+\infty[$

  Mais $\sum_n 1/n^x$ ne converge pas normalement sur $[1,+\infty[$

Astuce : Pour montrer que $\sum_k f_k$ converge normalement

Méthode 1 : Étude de fct

- On effectue une étude de fct pour f_k
- On calcule $\|f_k\|_\infty$, On montre que $\sum_k \|f_k\|_\infty$ converge

Méthode 1 : Encadrements

- On utilise $a \le x \le b$ pour encadrer $|f_k(x)| \le a_k$
- On montre que $\sum_k a_k$ converge

Astuce : Pour montrer que $\sum_k f_k$ ne converge pas normalement

Méthode 1 : Étude de fonction

- On effectue une étude de fct pour f_k
- On calcule $\|f_k\|_\infty$, On montre que $\sum_k \|f_k\|_\infty$ diverge

Méthode 2 : Contraposée

- Montrer que $\sum_k f_k$ ne converge pas simplement ou ne converge pas uniformément ou bien ne converge pas absolument

Méthode 3 : suite bien choisie

- Trouver une suite x_k tq $\sum_k f_k(x_k)$ diverge

3. Théorèmes Généraux

Objectif 1 : permuter les limites et les sommes

Théorème 1 : Passage à la limite sous le signe somme
Si $\sum_n f_n$ converge uniformément vers S sur I
Si $a \in I$ ou bien a extrémité de I
Si $\forall n \in \mathbb{N}$ (fixé), on $\lim_{x\to a} f_n(x)$ existe
Alors
- $\lim_{x\to a} S(x)$ existe
- $\sum_n \lim_{x\to a} f_n(x)$ converge
- $\lim_{x\to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$

Astuce
le théorème 1 peut être utilisé pour montrer que la converge n'est pas uniforme quand l'une des conclusion n'est pas vrai

Objectif 2 : Montrer qu'une somme est continue

Théorème 2 : Continuité de la limite uniforme
Si $\sum_n f_n$ converge uniformément vers S sur I
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur I
Alors : S est continue sur I

Remarque : le thm 2 n'est plus valable quand f_n converge simplement vers f : la somme simple de fcts continue n'est pas toujours continue

Astuce 1
le thm 2 peut être utilisé pour montrer que la converge n'est pas uniforme quand la conclusion n'est pas vraie

Astuce 2
le thm 2 est encore valable si on remplace converge uniforme sur I par convergence normale ou uniforme sur tout segment $[a,b] \subset I$
Dans ce cas il est conseillé d'utiliser la méthode des encadrement pour montrer la convergence uniforme ou normale locale

Objectif 3 : Permuter limite et dérivée

Théorème 3 : Dérivation terme à terme
Si $\forall$ n $\in$ IN, f_n dérivable sur I (respectivement de classe C^1 sur I)
Si $\sum_n f_n$ converge simplement vers S sur I
Si $\sum_n f_n'$ converge uniformément sur I
Alors :

- S dérivable sur I (respectivement de classe C^1 sur I)
- $(\sum_n f_n)' = \sum_n f_n'$

Théorème 4 : Dérivation successive terme à terme
Si $\forall$ n$\in$IN, f_n est k-fois dérivable sur I (respectivement de classe C^k sur I)
Si $\sum_n f_n^{(p)}$ converge simplement vers S sur I, $\forall\ 0 \leq p \leq k-1$
Si $\sum_n f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I
Alors :

- S est k-fois dérivable sur I (respectivement de classe C^k sur I)
- $(\sum_n f_n)^{(k)} = \sum_n f_n^{(k)}$

Théorème 5 : Dérivée infinie de la limite
Si $\forall$n$\in$IN, f_n indéfiniment dérivable sur I (respectivement de classe C^∞ sur I)
Si $\sum_n f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I, $\forall$ k $\in$ IN
Alors :

- $\sum_n f_n$ indéfiniment dérivable sur I (respectivement de classe C^∞ sur I)
- $(\sum_n f_n)^{(k)} = \sum_n f_n^{(k)}$, $\forall$ k $\in$ IN

Astuce 2
les Thm 3,4 et 5 sont encore valable si on remplace converge uniforme sur I par convergence uniforme sur tout segment $[a,b] \subset I$
Dans ce cas il est conseillé d'utiliser la méthode des encadrement pour montrer la convergence uniforme

Objectif 3 : Intégration terme à terme

Théorème 1 : Intégrale de la limite uniforme sur un segment
Si I=[a,b] segment
Si $\forall$ n$\in$IN, f_n continue (ou bien continue par morceaux de classe C^1 sur I)
Si $\sum_n f_n$ converge uniformément sur I
Alors : $\sum_n \int_I f_n(t)dt$ converge, avec

$$\sum_n \int_I f_n(t)dt = \int_I \sum_n f_n(t)dt$$

Théorème 2 : Convergence dominée
Si I intervalle qlq
Si $\forall$ n $\in$ IN, f_n continue (ou bien continue par morceaux de classe C^1 sur I)
Si $\sum_n f_n$ converge simplement vers f sur I
Si $\forall$ n $\in$ IN, f_n intégrable sur I
Si $\sum_n \int_I |f_n(t)|\, dt$ converge
Alors :
S=$\sum_n f_n$ est intégrable sur I avec

$$\sum_n \int_I f_n(t)dt = \int_I \sum_n f_n(t)dt$$