My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُوني مُولَاي اسمَاعِيل

MATH PrEPaS

MP

Suites de fonctions

Le Cours Complet
Les Astuces Concours

Objectif

1. Maîtriser les méthodes d'études des convergence
2. Apprendre les théorèmes généraux d'interversion de signes (hypothèses et conclusions) et savoir les exploiter

Soit $f_n : I \to$ IR ou C et $f : I \to$ IR ou C avec I intervalle
Dans le cas $f_n : I \to E$ (evn) : remplacer $| . |$ par $\| . \|$

1. Convergence Simple

Définition 1
On dit que que f_n converge simplement vers f <=> $\forall x \in I$ (fixé), on a

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Astuce
Pour montrer que f_n converge simplement vers f
- on fixe $x \in I$
- on cherche $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ (en utilisant les technique des suites numériques, surtout les équivalents simples ou bien le thm des croissances des comparées)

Rappel Théorèmes des croissances des comparées

$$\log = \ln << \text{puissance} = n^a << \exp = a^n << n! << n^n$$

Exemples
- $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $f(x)=0$ sur $]-1,1[$
- $f_n(x) = n.x^n$ converge simplement vers $f(x)=0$ sur $]-1,1[$ car $n << x^n$
- $f_n(x) = (1+x/n)^n$ converge simplement vers $f(x)=e^x$ sur IR
  car $\ln f_n(x) = n \ln(1+x/n) \sim n.(x/n) = x$

2. Convergence uniforme

Définition

On dit que que f_n converge uniformément vers f <=> $\lim_{n\to+\infty} \|f_n-f\|_\infty = 0$

où $\|f_n-f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)|$

Théorème 1

f_n converge uniformément vers f => f_n converge simplement vers f

Remarque

La réciproque du thm n'est pas toujours vraie
cad f_n conve rge simplement vers f n'implique pas que f_n converge simplement vers f

Contre Exemple

$f_n(x) = x^n$ converge simplement vers f(x)=0 sur]-1,1[mais $f_n(x) = x^n$ ne converge pas uniformément vers f(x)=0 sur I=]-1,1[,
car $\|f_n-f\|_\infty = \sup_{x\in I} |x^n| = 1$ ne tend pas vers 0

Astuce

Pour montrer que f_n converge uniformément vers f

Méthode 1 : Étude de fct

- On fixe $x\in I$ puis cherche $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$
- On effectue étude de fct pour $g_n(x)=f_n(x)-f(x)$
- On détermine $\varepsilon_n = \sup_{x\in I} |g_n(x)|$
- On vérifie que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

Méthode 2 : Encadrements directs

- On fixe $x\in I$ puis cherche $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$
- On utilise les bornes de I pour encadrer $a \le x \le b$
- On en déduit un encadrement de $f_n(x)$, puis f(x)
- On détermine ε_n tq $|f_n(x)-f(x)| \le \varepsilon_n$
- On vérifie que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

Astuce

Pour montrer que f_n ne converge pas uniformément vers f

Méthode 1 : Étude de fct

- On fixe $x \in I$ puis cherche $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$
- On effectue étude de fct pour $g_n(x)=f_n(x)-f(x)$
- On détermine $\varepsilon_n = \sup_{x \in I} \left|g_n(x)\right|$
- On vérifie que $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n \neq 0$

Méthode 2 : Suite adéquate

- On fixe $x \in I$ puis cherche $f(x)=\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$
- On cherche une suite (x_n) tq $f_n(x_n)-f(x_n)$ ne tend pas vers 0

Exemple

$f_n(x)=x^n \to f(x)= 0$ sur [0,1[convergence simple

Mais pour $x_n=1-1/n$, on $f_n(x_n) - f(x_n) = (1-1/n)^n \to e^{-1} \neq 0$ (pas de convergence uniforme)

3. Théorèmes Généraux

Objectif 1 : permuter les limites

Théorème 1 : Double limite
Si f_n converge uniformément vers f sur I
Si $a \in I$ ou bien a extrémité de I
Si $\forall n \in IN$ (fixé), on $\lim_{x\to a} f_n(x)$ existe
Alors

- $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
- $\lim_{n\to +\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a} . \left(\lim_{n\to +\infty} f_n(x)\right)$

Astuce
le Théorème 1 peut être utilisé pour montrer que la converge n'est pas uniforme quand l'une des conclusion n'est pas vrai

Exemple

$\lim_{n\to +\infty} \left(\lim_{x\to 1} x^n\right) = 1$ et $\lim_{x\to 1} \left(\lim_{n\to +\infty} x^n\right) = 0$

Pas de convergence uniforme de $f_n(x)=x^n$ sur [0,1[

Objectif 2 : Montrer qu’une limite est continue

Théorème 2 : Continuité de la limite uniforme
Si f_n converge uniformément vers f sur I
Si $\forall$ n $\in$ IN, f_n continue sur I
Alors : f est continue sur I

Remarque
le Théorème 2 n’est plus valable quand f_n converge simplement vers f
Autrement dit : la limite simple de fcts continue n’est pas toujours continue

Exemple
Sur I=]-1,1]: $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $f(x) = 0$ si $x<1$
$= 1$ si $x=1$
f_n continue sur I, alors f est discontinue en x=1

Astuce
le théorème 2 peut être utilisé pour montrer que la converge n’est pas uniforme quand la conclusion n’est pas vraie

Exemple
Sur I=]-1,1]: $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $f(x) = 0$ si $x<1$
$= 1$ si $x=1$
f_n continue sur I f est discontinue en x=1
Donc la convergence n’est pas uniforme

Astuce (très pratique)
le théorème 2 est encore valable si on remplace converge uniforme sur I par convergence uniforme sur tout segment $[a,b] \subset I$
Dans ce cas il est conseillé d’utiliser la méthode des encadrement pour montrer la convergence uniforme

Objectif 3 : Permuter limite et dérivée

Théorème 3 : Dérivée de la limite
Si $\forall$ n $\in$ IN, f_n dérivable sur I (respectivement de classe C^1 sur I)
Si f_n converge simplement sur I
Si f_n' converge uniformément sur I
Alors :

- f dérivable sur I (respectivement de classe C^1 sur I)
- $(\lim f_n)' = \lim (f_n')$

Théorème 4 : Dérivée $k^{ème}$ de la limite
Si $\forall$ n $\in$ IN, f_n k-fois dérivable sur I (respectivement de classe C^k sur I)
Si $f_n^{(p)}$ converge simplement sur I, $\forall\ 0 \leq p \leq k-1$
Si $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I
Alors :

- f est k-fois dérivable sur I (respectivement de classe C^k sur I)
- $(\lim f_n)^{(k)} = \lim (f_n^{(k)})$

Théorème 5 : Dérivée infinie de la limite
Si $\forall n \in$ IN, f_n indéfiniment dérivable sur I (respectivement de classe C^∞ sur I)
Si $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I, $\forall$ k $\in$ IN
Alors :

- f indéfiniment dérivable sur I (respectivement de classe C^∞ sur I)
- $(\lim f_n)^{(k)} = \lim (f_n^{(k)})$, $\forall$ k $\in$ IN

Astuce 2
les Théorèmes 3, 4 et 5 sont encore valables si on remplace converge uniforme sur I par convergence uniforme sur tout segment $[a,b] \subset$ I
Dans ce cas il est conseillé d'utiliser la méthode des encadrement pour montrer la convergence uniforme

Objectif 3 : Permuter limite et intégrale

Théorème 1 : Intégrale de la limite uniforme sur un segment
Si $I=[a,b]$ segment
Si $\forall\, n \in IN$, f_n continue (ou bien continue par morceaux de classe C^1 sur I)
Si f_n converge uniforme sur I
Alors :

$$\lim \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim\ f_n(t)dt$$

Théorème 2 : Convergence dominée
Si I intervalle
Si $\forall\, n \in IN$, f_n continue (ou bien continue par morceaux de classe C^1 sur I)
Si f_n converge simplement vers f sur I
Si $\exists\, g : I \to IR^+$ tq $|f_n(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in I$
Si g intégrable sur I
Alors :
f est intégrable sur I avec

$$\lim \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim\ f_n(t)dt$$

Astuce
Le théorème de convergence dominée peut être utilisée quand I est segment ou bien I est à bornes finie en cherchant g(t)=Cte

Exemple
Sur $I=]-1,1[$: $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $f(x) = 0$
La convergence n'est pas uniforme
$|f_n(x)| \leq 1$, donc $\lim \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim\ f_n(t)dt$