



MP

Suites de fonctions

Le Cours Complet Les Astuces Concours

Objectif

1. Maîtriser les méthodes d'études des convergence
2. Apprendre les théorèmes généraux d'interversion de signes (hypothèses et conclusions) et savoir les exploiter

Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} avec I intervalle
Dans le cas $f_n : I \rightarrow E$ (evn) : remplacer $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$

1. Convergence Simple

Définition 1

On dit que que f_n converge simplement vers $f \iff \forall x \in I$ (fixé), on a
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Astuce

Pour montrer que f_n converge simplement vers f

- on fixe $x \in I$
- on cherche $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ (en utilisant les technique des suites numériques, surtout les équivalents simples ou bien le thm des croissances des comparées)

Rappel Thm des croissances des comparées

$$\log = \ln \ll \text{puissance} = n^a \ll \text{exp} = a^n \ll n! \ll n^n$$

Exemples

- $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $f(x) = 0$ sur $] -1, 1[$
- $f_n(x) = n \cdot x^n$ converge simplement vers $f(x) = 0$ sur $] -1, 1[$ car $n \ll x^n$
- $f_n(x) = (1 + x/n)^n$ converge simplement vers $f(x) = e^x$ sur \mathbb{R}
car $\ln f_n(x) = n \ln(1 + x/n) \sim n \cdot (x/n) = x$

2. Convergence uniforme

Définition

On dit que f_n converge uniformément vers $f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$
où $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$

Théorème 1

f_n converge uniformément vers $f \Rightarrow f_n$ converge simplement vers f

Remarque

La réciproque du thm n'est pas toujours vraie
cad f_n converge simplement vers f n'implique pas que f_n converge simplement vers f

Contre Exemple

$f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $f(x) = 0$ sur $] -1, 1[$ mais $f_n(x) = x^n$ ne converge pas uniformément vers $f(x) = 0$ sur $I =] -1, 1[$,
car $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |x^n| = 1$ ne tend pas vers 0

Astuce

Pour montrer que f_n converge uniformément vers f

Méthode 1 : Étude de fct

- On fixe $x \in I$ puis cherche $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$
- On effectue étude de fct pour $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$
- On détermine $\varepsilon_n = \sup_{x \in I} |g_n(x)|$
- On vérifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$

Méthode 2 : Encadrements directs

- On fixe $x \in I$ puis cherche $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$
- On utilise les bornes de I pour encadrer $a \leq x \leq b$
- On en déduit un encadrement de $f_n(x)$, puis $f(x)$
- On détermine ε_n tq $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n$
- On vérifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$

Astuce

Pour montrer que f_n ne converge pas uniformément vers f

Méthode 1 : Étude de fct

- On fixe $x \in I$ puis cherche $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$
- On effectue étude de fct pour $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$
- On détermine $\varepsilon_n = \sup_{x \in I} |g_n(x)|$
- On vérifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n \neq 0$

Méthode 2 : Suite adéquate

- On fixe $x \in I$ puis cherche $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$
- On cherche une suite (x_n) tq $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0

3. Théorèmes Généraux

Objectif 1 : permuter les limites

Théorème 1 : Double limite

Si f_n converge uniformément vers f sur I

Si $a \in I$ ou bien a extrémité de I

Si $\forall n \in \mathbb{N}$ (fixé), on $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe

Alors

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$

Astuce

le thm 1 peut être utilisé pour montrer que la convergence n'est pas uniforme quand l'une des conclusion n'est pas vrai

Exemple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1} x^n \right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \right) = 0$$

Pas de convergence uniforme

Objectif 2 : Montrer qu'une limite est continue

Théorème 2 : Continuité de la limite uniforme

Si f_n converge uniformément vers f sur I

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur I

Alors : f est continue sur I

Remarque

le thm 2 n'est plus valable quand f_n converge simplement vers f
Autrement dit : la limite simple de fcts continue n'est pas toujours continue

Exemple

Sur $I =]-1, 1]$: $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $f(x) = 0$ si $x < 1$
 $= 1$ si $x = 1$

f_n continue sur I , alors f est discontinue en $x = 1$

Astuce

le thm 2 peut être utilisé pour montrer que la convergence n'est pas uniforme quand la conclusion n'est pas vraie

Exemple

Sur $I =]-1, 1]$: $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $f(x) = 0$ si $x < 1$
 $= 1$ si $x = 1$

f_n continue sur I f est discontinue en $x = 1$

Donc la convergence n'est pas uniforme

Astuce

le thm 2 est encore valable si on remplace converge uniforme sur I par convergence uniforme sur tout segment $[a, b] \subset I$

Dans ce cas il est conseillé d'utiliser la méthode des encadrement pour montrer la convergence uniforme

Objectif 3 : Permuter limite et dérivée

Théorème 3 : Dérivée de la limite

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n dérivable sur I (respectivement de classe C^1 sur I)

Si f_n converge simplement sur I

Si f_n' converge uniformément sur I

Alors :

- f dérivable sur I (respectivement de classe C^1 sur I)
- $(\lim f_n)' = \lim (f_n)'$

Théorème 4 : Dérivée kème de la limite

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n k -fois dérivable sur I (respectivement de classe C^k sur I)

Si $f_n^{(p)}$ converge simplement sur I , $\forall 0 \leq p \leq k-1$

Si $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I

Alors :

- f k -fois dérivable sur I (respectivement de classe C^k sur I)
- $(\lim f_n)^{(k)} = \lim (f_n)^{(k)}$

Théorème 5 : Dérivée infinie de la limite

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n indéfiniment dérivable sur I (respectivement de classe C^∞ sur I)

Si $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I , $\forall k \in \mathbb{N}$

Alors :

- f indéfiniment dérivable sur I (respectivement de classe C^∞ sur I)
- $(\lim f_n)^{(k)} = \lim (f_n)^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Astuce 2

les Thm 3, 4 et 5 sont encore valable si on remplace converge uniforme sur I par convergence uniforme sur tout segment $[a,b] \subset I$

Dans ce cas il est conseillé d'utiliser la méthode des encadrement pour montrer la convergence uniforme

Objectif 3 : Permuter limite et intégrale

Théorème 1 : Intégrale de la limite uniforme sur un segment (MP & PSI)

Si $I=[a,b]$ segment

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n continue (ou bien continue par morceaux de classe C^1 sur I)

Si f_n converge uniforme sur I

Alors :

$$\lim \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim f_n(t)dt$$

Théorème 2 : Convergence dominée (uniquement MP)

Si I intervalle

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n continue (ou bien continue par morceaux de classe C^1 sur I)

Si f_n converge simplement vers f sur I

Si $\exists g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ tq $|f_n(x)| \leq g(x) \forall x \in I$

Si g intégrable sur I

Alors :

f est intégrable sur I avec

$$\lim \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim f_n(t)dt$$

Astuce 2 (MP)

Quand I est segment ou bien I est à bornes finie

Le thm de convergence dominée peut être utilisée en cherchant $g(t)=Cte$

Exemple

Sur $I=]-1,1[$: $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $f(x) = 0$

La convergence n'est pas uniforme

$$|f_n(x)| \leq 1, \text{ donc } \lim \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim f_n(t)dt$$