Résumé de cours : *Fonctions intégrables.*

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Table des matières

1 Préliminaires.

Dans tout le chapitre I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

1.1 Cas d'une fonction continue positive.

Définition 1. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, on dira que f est intégrable sur I si et seulement si $\exists M > 0$ tel que $\int_J f(t)\,\mathrm{d}t \leq M$, pour tout segment $J \subset I$, dans ce cas on pose $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_J \int_J f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Proposition 1. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, on suppose qu'elle existe une suite de segment $J_n \subset I$ croissante pour l'inclusion telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$ avec $\int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ majorée, alors f est intégrable sur I, avec $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\in\mathbb{N}} \int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t$.*

1.2 Cas d'une fonction réelle continue.

Définition 2. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on dira que f est intégrable sur I si et seulement si f^+ et f^- sont intégrables, dans ce cas on pose $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f^+(t)\,\mathrm{d}t - \int_I f^-(t)\,\mathrm{d}t$.*

Proposition 2. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f est intégrable sur I si et seulement si $|f|$ est intégrable sur I.*

1.3 Cas d'une fonction complexe continue.

Définition 3. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, on dira que f est intégrable sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables, dans ce cas on pose $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_I \mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}t$.*

Proposition 3. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, alors f est intégrable sur I si et seulement si $|f|$ est intégrable sur I.*

Proposition 4. *Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue intégrables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ estt intégrable sur I.*
En particulier l'ensemble des fonction intégrables sur I, noté $\ell^{+\infty}(I)$ est un espace vectoriel pour les lois $+$ et .

Remarque. Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue et $c \in]a, b[$,alors f est inégrable sur $]a, b[$ *si et seulement si* elle l'est sur $]a, c]$ et $[c, b[$.
Ainsi l'étude de l'intégrabilié peut se restreindre aux intervalle de la $]a, b]$ ou $[a, b[$.

2 Quelques techniques d'intégrabilité.

2.1 Étude du prologement par continuité.

Théoréme 1. *Si $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue, admettant une limite finie en b avec $b \in \mathbb{R}$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.*

Remarques.
- Le théorème est encore valable sur les intervalles $]a, b]$ et $[a, b[$ avec a, b réels.
- Si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, le théorème n'est pas toujours vrai, comme pour la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ non intégrable sur $[1, +\infty[$ bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

2.2 Étude de la limite aux bornes de la primitive.

Théoréme 2. *Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive, telle que $\lim\limits_{x\to b^-} \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et soit finie, alors f est intégrable sur $[a, b[$.*
Et dans ce cas $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque.
Le théorème est encore vrai sur les intervalles de la forme $]a, b]$ ou $]a, b[$ pour les fonctions continues qui y gardent un signe constant, toute fois il risque d'être faux pour les fonctions qui changent de signe comme pour la fonction $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ sur $[\pi, +\infty[$ qui n'est pas intégrable bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_\pi^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe et soit finie.
Pour ce type de fonction on étudie plutôt $\lim\limits_{x\to b^-} \displaystyle\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$, si elle est finie, alors $|f|$ est intégrable donc f aussi, et dans ce cas $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Application.
- $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, a]$ *si et seulement si* $\alpha < 1$.
- $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ *si et seulement si* $\alpha > 1$.

2.3 Comparaison à une focntion de référence.

Théoréme 3. *Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telle que $|f| \leq g$, alors : g intégrable sur $I \Longrightarrow f$ intégrable sur I.*

Corollaire 1. *Soit $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telle que $g \leq f \leq h$, si g et h sont intégrables sur I, alors f est aussi intégrable sur I.*

Corollaire 2. *Soit $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues telle que $f =_b o(g)$ ou $f =_b O(g)$, si g est intégrable sur I, alors f est aussi intégrable sur I.*

Application. Soit f continue, si :
- $\exists \alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t)$ existe et soit finie, alors f est intégrable au voisinage de $+\infty$.
- $\exists \alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha f(t)$ existe et soit finie, alors f est intégrable au voisinage de 0.

Corollaire 3. *Soit $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues telle que $f \sim_b g$, alors : g est intégrable sur $[a, b[$, si et seulement si f est aussi intégrable sur $[a, b[$.*

Fin.