PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA - LÉON L'AFRICAIN
MP

Résumé de cours : *Intégration sur un segment.*

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Table des matières

1 Fonctions en escaliers

1.1 Subdivision d'un segment

Définition 1. *On appelle subdivision de* $[a,b]$ *toute suite finie strictement croissante* $\sigma=(x_i)_{0\le i\le n}$ *tel que* $x_0=a, x_n=b$.
On dit que $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est en escalier sur* $[a,b]$ *si et seulement si elle existe une subdivision de* $[a,b]$*, dite adaptée à* φ*, tel que* φ *est constante sur chacun des intervalles ouverts de cette subdivision et admet des limites finies en leurs extremités à gauche et à droite.*
L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre.*

1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2. *Soit* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *en escalier, et* $\sigma=(x_i)_{0\le i\le n}$ *une subdivision de* $[a,b]$ *adaptée à* φ*, et* λ_i *la constante prise par* φ *sur chaque intervalle* $]x_i,x_{i+1}[$ *alors la somme*
$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(x_{i+1}-x_i)$ *ne dépond pa du choix de* σ *on l'appelle alors l'intégrale de* φ *sur* $[a,b]$ *et on la note par* $\int_{[a,b]}\varphi$ *ou bien* $\int_a^b \varphi(t)dt$

2 Fonctions continues par morceaux

2.1 Approximation d'une fonction continue par morceaux à l'aide de fonctions en escaliers

Définition 3. *On dit que* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est continue par morceaux sur* $[a,b]$ *si et seulement si elle existe une subdivision de* $[a,b]$*, dite adaptée à* f*, tel que* f *est continue sur chacun des intervalles ouverts de cette subdivision et admet des limites finies en leurs extremités.*
L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ *est un* $\mathbb{R}$*-ev.*

Théoréme 1. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux, alors* $\forall \varepsilon > 0$ *ils existent* φ *et* ψ *en escalier sur* $[a,b]$ *telles que* $\varphi \leq f \leq \psi$ *et* $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.

2.2 Propriétés de l'intégrale

- Linéaire : $\displaystyle\int_{[a,b]} f + \lambda g = \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g.$
- Positif : $\displaystyle f \geq 0 \Longrightarrow \int_{[a,b]} f \geq 0.$
- Croissant : $\displaystyle f \leq g \Longrightarrow \int_{[a,b]} f \leq 0 \int_{[a,b]}.$
- Relation de CHASLES. $\displaystyle\int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f = \int_{[a,c]}.$
- $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$
- $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|.$ Inégalité de la moyenne.

2.3 Cas des fonctions continues

Théoréme 2. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue positive, alors :*
$\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0 \Longrightarrow f = 0$ *sur* $[a,b]$.

Théoréme 3. *Soit* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continues, alors*

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right) \leq \left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[a,b]} g^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \textit{Inégalité de Cauchy–Scwarz.}$$

Avec égalité si et seulement si f *et* g *sont proportionnelles.*

3 Primitive d'une fonction continue

Définition 4. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue, on appelle primitive de* f *sur* $[a,b]$ *toute fonction* F *de classe* C^1 *sur* $[a,b]$ *telle que* $F' = f$.

Théoréme 4. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue alors l'application* F *définie par* $\displaystyle F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *est une primitive de* f *et tout autre primitive* G *de* f *s'obtient à l'aide de la formule* $\displaystyle G(x) = \int_a^x f(t)dt + G(a)$.

Corollaire 1. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *alors :*
$\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ *noté souvent* $[f]_a^b$.

Corollaire 2. *Soit* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *alors :*
$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt \quad \textit{Intégration par parties.}$$

Corollaire 3. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue et* $\varphi : [a,b] \to R$ *de classe* C^1 *alors* $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$, *en posant le changement de variable* $u = \varphi(t)$.

4 Formules de Taylor

On suppose que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}, on a les résultats suivants :
Formule de Taylor avec reste intégral.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Inégalite de Taylor-Lagrange.

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right|.$$

Formule de Taylor-Young.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((b-a)^n\right)$$

5 Calcul approché d'intégrales

5.1 Sommes de Riemman

Théoréme 5. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

Intéprétation. En posant $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$, appelée somme de Riemman, on a alors $R_n(f) = \int_a^b \varphi(t)dt$, avec φ en escalier sur $[a,b]$ égale à $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ sur chaque intervalle $\left]a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right[$ ainsi on approche $\int_a^b f(t)dt$ à l'aide de celui d'une fonction en escalier qui est somme de surfaces de rectangles.

Remarques.
Le théorème s'écrit encore : $\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$ ou encore $\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$.

Le cas le plus pratique est $a = 0, b = 1$, le théorème s'écrit alors : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$, qu'on peut lire ainsi *la moyenne de Césaro (arithmétique)* converge vers l'intégrale.

5.2 Méthode des trapézes

Le principe est d'approcher $\int_a^b f(t)dt$ à l'aide de $T_n(f) = \int_a^b \varphi(t)dt$ où φ affine par morceaux sur $[a,b]$ qui coincide (interpolle) avec aux extremités $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ avec $0 \leq k \leq n$. On a alors le résultat suivant :
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2, alors $\left|T_n(f) - \int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2(f)$ où $T_n(f) = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) + f(x_{k+1}))$ et $x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \forall 0 \leq k \leq n$ avec $M_2(f) = \sup_{[a,b]} |f''|$.

Fin.