Feuille d'exercices : *Espaces vectoriels*
Partie I : *Généralités*

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Exercice 1. *Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E. Montrer que : $F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$.*

Exercice 2. *Soient F, G, F', G' des sev d'un ev E. Montrer que si $F \cap G = F' \cap G'$ alors $\big(F + (G \cap F')\big) \cap \big(F + (G \cap G')\big) = F$.*

Exercice 3. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul et $F_1, \dots, F_n$ des sev stricts de E. On veut montrer que $E \neq F_1 \cup \dots \cup F_n$:*

1) *Traiter le cas $n = 2$.*

2) *Cas général : on suppose $F_n \not\subset F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$ et on choisit $x \in F_n \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_{n-1})$ et $y \notin F_n$.*

- *a) Montrer que : $\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \notin F_n$.*
- *b) Montrer que : $\forall\ i \leq n-1$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda x + y \in F_i$.*
- *c) Conclure.*

Exercice 4. *Montrer que les familles $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}, \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}\}$ sont libres dans $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$–ev .*

Exercice 5. *Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.*
$f_1 : x \to \sin(x)$, $f_2 : x \to \sin(x + a)$, $f_3 : x \to \cos(x)$.
Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 6. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que les familles suivantes $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans chacun des cas suivants :*

1) $f_k(x) = x^k$	**2)** $f_k(x) = e^{kx}$
3) $f_k(x) = \cos(kx)$	**4)** $f_k(x) = \cos^k(x)$

Exercice 7. *Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g : E \to E$ linéaires. Montrer que : $f(\ker g \circ f) = \ker g \cap$ Im (f)*

Exercice 8. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $f^2 + f = 0$. Montrer que : $\ker f \oplus \ker f + id_E = E$*

Exercice 9. *Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.*

1) *Montrer que $E = \ker f \oplus$ Im (g).*

2) *Montrer que $f($ Im $(g)) =$ Im (f).*

Exercice 10. *Soit $T > 0$, on pose $E = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ T-périodique $\}$.*

1) *Montrer que la primitive d'une fonction f, T–périodique est aussi T-périodique si et seulement si $\displaystyle\int_0^T f(x)dx = 0$.*

2) *Soit $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ montrer que : $E = \ker u \oplus$ Im (u).*

Exercice 11. *Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, et f,g deux endomorphismes de E.*
Montrer que : $g\circ f=0 \iff Im\,(f)\subset \ker g$.

Exercice 12. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E.*

1) *Montrer que :* $Im\,(f)\cap\ker f=\{0_E\}\iff \ker f=\ker f^2$.
2) *Montrer que :* $E= Im\,(f)+\ker f \iff Im\,(f)= Im\,(f^2)$.
3) *Donner une condition necessaire et suffisante sur f pour qu'on ait :* $E= Im\,(f)\oplus\ker f$.

Exercice 13. .

1) *Soient* $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *tel que* $x+y+z=0\}$,
$F=\{(a,2a,4a)$ *tel que* $a\in\mathbb{R}\}$. *Montrer que :* $\mathbb{R}^3=E\oplus F$.
2) *Pour tout* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, *déterminer* $p((x,y,z))$ *la projection sur E parallélement à F et* $s((x,y,z))$ *la symétrie par rapport à E parallélement à F .*

Exercice 14. *On considère p et q deux projecteurs sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.*

1) *Montrer que :* $p\circ q=q\iff Im\,(q)\subset Im\,(p)$.
2) *Montrer que :* $p+q$ *est un projecteur* $\iff p\circ q+q\circ p=0$
$\iff p\circ q=0, q\circ p=0$
et que dans ce cas : $Im\,(p)\cap Im\,(q)=\{0_E\}$
$\ker p+q=\ker p\cap\ker q$
3) *On suppose dans cette question que :* $p\circ q=0$. *Montrer que :*
   a) $r=p+q-q\circ p$ *est un projecteur.*
   b) $\ker r=\ker p\cap\ker q$
   c) $Im\,(r)= Im\,(p)\oplus Im\,(q)$.

Exercice 15. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que : $(x,f(x))$ est liée $\forall\,x\in E$.*

1) *Montrer que* $\forall\,x\in E\setminus\{0_E\},\exists\lambda_x\in\mathbb{K}$ *tel que* $f(x)=\lambda_x.x$.
2) *Montrer que* $\forall\,(x,y)\in(E\setminus\{0_E\})^2$, *on a :* $\lambda_x=\lambda_y$
On pourra étudier les cas : $\{x,y\}$ libre et $\{x,y\}$ liée.
3) *En déduire que f est une homothétie de E.*
4) *Montrer que f est une homothétie de E si et seulement si pour tout x dans E, on a $(x,f(x))$ est liée.*

Exercice 16. .

1) *Montrer que tout $\mathbb{R}$-endomorphisme, f de $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme :* $f(z)=az+b\overline{z}$ *où $a,b\in\mathbb{C}$ des constantes à exprimer en fonction de $f(1)$ et $f(i)$.*
2) *Montrer que f injectif* $\Leftrightarrow |a|\neq|b|$.

Exercice 17. .

1) *Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f,g\in\mathcal{L}(E)$ tels que* $f^2=0, f\circ g+g\circ f=id_E$.
Montrer que $Ker\,(f)= Im\,(f)$.
2) *Réciproquement, soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $Ker\,(f)= Im\,(f)$, et soit F un supplémentaire de $Ker\,(f)$. Montrer que :*
   a) $f^2=0$.
   b) $\forall x\in E$, *il existe $y,z\in F$ uniques tels que* $x=y+f(z)$.
   c) *Il existe $g\in\mathcal{L}(E)$ tel que* $f\circ g+g\circ f=id_E$.

Exercice 18. *Soit E un espace vectoriel et $f,g\in\mathcal{L}(E)$ tels que $f\circ g=id_E$. Montrer que $g\circ f$ est une projection et que :*
$Im\,(g)\circ f = Im\,(g)$
$Ker\,(g)\circ f = Ker\,(f)$

Exercice 19. *Soit u, v et w trois vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E.*

1) *Montrer que $Vect(u,v) = Vect(u,w)$ si et seulement si :* $\exists \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{K} \quad \alpha u+\beta v+\gamma w = 0 \quad$ *et* $\quad \beta\gamma \neq 0$
2) *Soit F un sous-espace vectoriel de E.*
   Montrer que $F+\mathbb{K}v = F+\mathbb{K}w$ si et seulement si : $\exists u \in F \quad \exists \alpha,\beta \in \mathbb{K} \quad u+\alpha v+\beta w = 0 \quad$ *et* $\quad \alpha\beta \neq 0$

Exercice 20. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :* $f^2-5f+6id_E = 0$

1) *Montrer que* $(f-2id_E)\circ(f-3id_E) = 0$.
2) *En déduire que* $E = \ker(f-2id_E) \oplus \ker(f-3id_E)$.

Exercice 21. ***Rendre directe une somme***
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev E tels que $F+G = E$. On note F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.
Montrer que : $E = F' \oplus G$

Exercice 22. ***Barycentre de projections :***
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et p,q deux projections de même base H et de directions F,G. Montrer que $\lambda p+(1-\lambda)q$ est encore une projection de base H.
On rappelle que la base d'un projecteur est son image, sa direction est son noyau.

Exercice 23. ***Commutant d'un projecteur***
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et u un endomorphisme de E.
On note : $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $u\circ v = v\circ u\}$

1) *Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$.*
2) *On suppose que $u = p$ est un projecteur. Montrer que v commute avec p si et seulement si v laisse stable le noyau et l'image de p.*

Exercice 24. ***Commutants itérés :***
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$: $\varphi(v) = v\circ u - u\circ v$, et on note $C_i = \ker \varphi^i$, ainsi $C_0 = 0$, C_1 est le commutant de u, C_2 est l'ensemble des v tels que $v\circ u - u\circ v$ commute avec u,...).

1) *Calculer $\varphi(v\circ w)$ en fonction de $v, w, \varphi(v)$ et $\varphi(w)$.*
2) *Montrer que $C = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ appelée* ***Commutant*** *de $\mathcal{L}(E)$.*

Exercice 25. ***Relation d'ordre sur les projecteurs :***
On munit l'ensemble des projections d'un espace vectoriel E de la relation binaire suivante : $p \ll q \iff p\circ q = q\circ p = p$

1) *Montrer que c'est une relation d'ordre.*
2) *Soient p,q deux projections permutables. Montrer que* $\sup(p,q) = p+q-p\circ q$ *et* $\inf(p,q) = p\circ q$.

Exercice 26. ***Endomorphismes nilpotents.*** *Soit E ev et $f,g : E \to E$ linéaires, $n \in \mathbb{N}^*$ telles que f est une bijection vérifiant :* $f\circ g = g\circ f, \quad g^n = 0$.
On dit alors que g est un endomorphisme ***nilpotent.***

1) *Montrer que $id_E - g$ et $id_E + g$ sont des automorphisme de E, puis exprimer leurs réciproques en fonction des puissances de g.*
   Indication : on pourra utiliser l'égalité :
   $$id_E - u^n = (id_E - u)\sum_{k=0}^{n-1} u^k \quad \forall u \in \mathcal{L}(E).$$
2) *Montrer que* $(f^{-1}\circ g)^n = 0$.
3) *En déduire que $id_E - f^{-1}\circ g$ est un automorphisme de E.*
4) *Montrer que $f+g$ est un isomorphisme.*

Fin.