Feuille d'exercices : *Espaces vectoriels.*
Partie II : *Dimension finie.*

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Exercice 1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = id_E$.*

1) *Montrer que :* $Ker\ (()f - id_E) \oplus Im\ (()f - id_E) = E$.
2) *Montrer que :* $\begin{array}{lll} Ker\ (()f - id_E) & = & Im\ (()f^2 + f + id_E) \\ Im\ (()f - id_E) & = & Ker\ (()f^2 + f + id_E) \end{array}$.

Exercice 2. *Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimensions finies et $u, v : E \to F$ linéaires.*

1) *Montrer que* $Im\ (u + v) \subset Im\ (u) + Im\ (v)$.
2) *En déduire que* $rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v)$.
3) *Montrer que* $Im\ (u) \cap Im\ (v) = \{0_E\} \Longrightarrow \ker u + v = \ker u \cap \ker v$.
4) *Montrer qu'il y a égalité si et seulement si* $Im\ (u) \cap Im\ (v) = \{0_F\}$ *et* $Ker\ (u) + Ker\ (v) = E$.
5) *En déduire que* $|\ rg(u) - rg(v)| \leq rg(u + v)$.
6) *Discuter les cas d'égalité.*

Exercice 3. *Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimensions finies. $u, v : E \to F$ linéaires telles que :* $Im\ (u) + Im\ (v) = \ker u + \ker v = E$. *Montrer que les deux sommes sont directes .*

Exercice 4. *Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimensions finies. $u : E \to F$, $v : F \to E$ linéaires telles que $vouov = v, uovou = u$. Montrer que :* $E = Im\ (v) \oplus \ker u$ *et* $rg(u) = rg(v)$.

Exercice 5. *Soit E de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $f \circ g = 0, f + g \in GL(E)$. Montrer que* $rg(f) + rg(g) = \dim E$.

Exercice 6. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, H est un sous espace vectoriel de E et K est un sous espace vectoriel de F, montrer que :*

1) $Im\ (f_{|H}) = f(H)$ *et* $\ker f_{|H} = \ker f \cap H$.
2) $\dim f(H) = \dim(H) - \dim(H \cap \ker f)$.
3) $\dim(f^{-1}(K)) = \dim(K \cap Im\ (f)) + \dim(\ker f)$.

Exercice 7. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0$.*

1) *Montrer que* $rg(f) + rg(f^2) \leq \dim(E)$.
2) *Montrer que* $2\ rg(f^2) \leq rg(f)$.
   Indication : On pourra appliquer le théorème du rang à $f_{\restriction Im\ (f)}$.

Exercice 8. *Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Établir que :*

1) $\dim\ Ker\ (()f \circ g) \leq \dim\ Ker\ (f) + \dim\ Ker\ (g)$.
   Indication : On pourra appliquer le théorème du rang à $f_{\restriction Im\ (g)}$.
2) $\dim(\ Im\ (f) \cap Ker\ (g)) = rg(f) - rg(g \circ f)$.
   Indication : On pourra appliquer le théorème du rang à $g_{\restriction Im\ (f)}$.
3) $rg(f) + rg(g) - \dim E \leq rg(f \circ g) \leq \min(\ rg(f),\ rg(g))$.

Exercice 9. *Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -id_E$. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $u \in E$, on pose : $z.u = xu + yf(u)$.*

1) *Montrer qu'on définit ainsi une structure de $\mathbb{C}$-ev sur E.*

2) *En déduire que $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ est paire.*

Exercice 10. *Soient H, K deux sev d'un ev E de dimension finie. Montrer que $\dim H = \dim K$ si et seulement si H et K ont un supplémentaire commun*
Raisonner par récurrence sur codim $H = \dim E - \dim H$.

Exercice 11. *Soient $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ telles que $\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \neq \{0\}$. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.*

Exercice 12. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in E^*$ et $(f_1, \dots, f_n)$ libre dans E^*.*
Montrer que f est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$ si et seulement si $Ker\,(f) \supset \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$.

Exercice 13. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f_1, \dots, f_p \in E^*$. On considère l'application :*

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ x & \longmapsto & \Big(f_1(x), \dots, f_p(x)\Big) \end{array}$$

Montrer que Φ est surjective si et seulement si $(f_1, \dots, f_p)$ est libre.

Exercice 14. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On suppose qu'il existe p formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ telles que : $\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i = \{0\}$.*
Montrer que E est de dimension finie inférieure ou égale à p.

Exercice 15. *Sur $\mathbb{R}^3$ on considère les formes linéaires suivantes définies par : $f_1(x, y, z) = x + 2y + 3z$, $f_2(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$ et $f_3(x, y, z) = 3x + 4y + 6z$.*

1) *Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.*

2) *Trouver sa base duale $\mathcal{B}^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*)$, vérifiant*

$$\begin{array}{lll} f_i^*(f_j) & = 1 & si\ i = j \\ & = 0 & si\ i \neq j \end{array}$$

Exercice 16. ***Polynômes d'interpolation de Hermite.***
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable et $(r_k)_{1 \le k \le n}$ réels de $[0, 1]$ deux a deux distincts ,et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{2n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = (P(r_1), P'(r_1), .., P(r_n), P'(r_n)) \end{array}$$

1) *Montrer que φ est un isomorphisme.*

2) *En déduire qu'il existe un unique polynôme qui interpole f et dont la dérivée interpole f' aussi aux points $(r_k)_{1 \le k \le n}$.*

Exercice 17. ***Formule de Van der Monde** :*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [[0, n]]$ on pose : $P_k(X) = (X - a)^k (X - b)^{n-k}$

1) *Démontrer que $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*

2) *Calculer les composantes dans $\mathcal{B}$ de $\Big((X - a)^k (X - b)^n\Big)^{(n)}$.*

3) *En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.*

Exercice 18. ***Centre de $\mathcal{L}(E)$.***

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Le centre de $\mathcal{L}(E)$ est :
$Z = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } \forall\ g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.
Autrement dit formé par les endomorphismes qui commuttent avec tous les autres.

1) *Soit $f \in Z, x \in E$ tel que $(x, f(x))$ est libre, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $g(x) = x$ et $g \circ f(x) = -f(x)$.*
2) *En déduire que Z est l'ensemble des homothéties.*
3) *Déterminer $Z' = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } \forall\ g \in GL(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.*

Exercice 19. ***Endomorphisme nilpotent.***

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, l'indice de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1) *Soit $u \in E \setminus \ Ker\ (f)^{p-1}$.*
   Montrer que la famille $\big(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u)\big)$ est libre.
2) *En déduire que si E est de dimension finie n, alors $f^n = 0$.*
3) *Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.*
   Montrer que $f + g \in GL(E) \dots$

Exercice 20. ***Endomorphisme cyclique.***

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\big(f^k(x)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ engendre E.

1) *Montrer que $\big(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.*
   Considérer p maximal tel que $\mathcal{F} = \big(x, \dots, f^{p-1}(x)\big)$ est libre, et prouver que $f^k(x)$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ pour tout entier $k \geq p$.
2) *Montrer qu'un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f si et seulement si c'est un polynôme en f.*

Exercice 21. ***Noyaux itérés.***

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \ Im\ (()f^k)$.

1) *Montrer que la suite (N_k) est croissante (pour l'inclusion) et que la suite (I_k) est décroissante.*
2) *Soit p tel que $N_p = N_{p+1}$. Justifier l'existence de p et montrer que $N_{p+1} = N_{p+2} = \cdots = N_{p+k} = \dots$*
3) *Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p.*
4) *Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.*
5) *Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))$ est décroissante.*
   Indication : Prendre F supplémentaire de I_k dans I_{k+1} et montrer que $I_{k+2} = I_{k+1} + f(F)$.

$\boxed{\text{Fin.}}$