Feuille d'exercices: *Déterminants*

Exercice 1 **. Matrice de Van Der Monde.**

Soient $a_1, \dots, a_n$ **des réels deux à deux distincts, on pose** $V(a_1, \dots, a_n) = \left(a_i^{j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ **et** $P(X) = \det\left(V(a_, \dots, a_{n-1}, X\right)$**.**

1) **Montrer que** $P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$**.**
   Indication : Développer le déterminant suivant le dernière colonne.
2) **Préciser son coefficient dominant.**
3) **Calculer** $P(a_i)$**.**
4) **En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de** $P(X)$ **.**
5) **Calculer le déterminant de la matrice de Van Der Monde** $\left(a_i^{j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$
6) **A quelle condition la matrice est inversible.**

Exercice2 **. Matrice de Van Der Monde et polynômes d'interpollation de Lagrange.**
Soient $a_1, \dots, a_n$ **des réels deux à deux distincts.**
Pour tout $1 \leq i \leq n$**, on pose** $L_i(X) = \prod\limits_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \dfrac{X - a_j}{a_i - a_j}$

$\mathcal{B}_1 = (1, X, \dots, X^{n-1}); \mathcal{B}_2 = (L_1, \dots, L_n)$**.**

1) **Calculer** $L_i(a_j)$ **pour tout** $1 \leq i, j \leq n$**.**
2) **En déduire que** $\mathcal{B}_2$ **est une base de** $\mathbb{R}_{n-1}[X]$**, appelée la base d'interpolation de Lagrange aux points** $a_1, \dots, a_n$**.**
3) **Montrer que** $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]; \quad P(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(a_k) L_k(X)$ **.**
4) **En déduire que** $P_{\mathcal{B}_2 \longrightarrow \mathcal{B}_1} = V(a_1, \dots, a_n)$ **.**
   Conclure $V(a_1, \dots, a_n)$ **est inversible .**
5) **On pose** $M = V(a_1, \dots, a_n)$**,** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$**, et**

   $P(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k X^{k-1}$**.**
   a) **Montrer que** $MX = 0 \Longleftrightarrow P(a_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq n$**.**
   b) **En déduire que** $V(a_1, \dots, a_n)$ **est inversible.**
6) **Écrivez le déterminant :** $\det\Big(\cos((j-1)\theta_i)_{1 \leq i,j \leq n}\Big)$ **sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.**

Exercice3 . **Soit** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **et** $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

1) **Démontrer que :** $\det(A + \alpha U) = \det A + \alpha \sum$ **cofacteurs de** A.

2) **Soit** $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$**, on pose :** $D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}$,

   a) **Montrer que :** $D(a-b, 0, c-b) = (a-b)^n$
   $D(a-c, b-c, 0) = (a-c)^n$

   b) **On suppose que** $b \neq c$**, montrer que :**
   $D(a,b,c) = \dfrac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$.

   c) **On suppose que** $b = c$**, montrer que :**
   $\det((a-b)I + bU) = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1}$.

Exercice 11 . **Autour de la Comatrice.**

1) **Soit** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **triangulaire supérieure.**

   a) **On suppose que** A **est inversible.**
   Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$**, associé à** A **dans la base canonique** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$**, on pose** $F_k = Vect(e_1, \cdots, e_k)$ **pour tout** $k \in \{1, \dots, n\}$.

      i. **Montrer que** $f(F_k) = F_k$.

      ii. **En déduire que** $f^{-1}(F_k) = F_k$.

      iii. **En déduire que** A^{-1} **est triangulaire supérieure.**

      iv. **En déduire que** $com(A)$ **est triangulaire inférieure.**

   b) **On suppose que** A **est non inversible.**
   Soit $\alpha = \min\{|\lambda|$ **tel que** λ **valeur propre non nulle de** $A\}$

      i. **Montrer que** $\forall 0 < \varepsilon < \alpha$**, on a** $A - \varepsilon I_n$**, non inversible.**

      ii. **En déduire que** $com(A)$ **est triangulaire inférieure.**

2) **Soit** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**. Étudier le rang de com**(A) **en fonction du rang de** A**. Montrer que :**
   rg(com$(A)) = n$ **si rg**$(A) = n$
   rg(com$(A)) = 1$ **si rg**$(A) = n-1$
   rg(com$(A)) = 0$ **si rg**$(A) \leq n-2$

3) **Calculer com** $(\mathbf{com}\, A)$ **dans le cas où** A **est inversible.**

4) **Si rg**$A \leq n-2$**, démontrer que com** $A = 0$.

5) **Si rg**$A = n-1$**, montrer que com** $A = U^t V$**, où** $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6) **Soit** $n \geq 2$ **et** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   a) **Calculer com** (I_n) **et com** (λA).

   b) **Si** A **et** B **sont inversibles, démontrer que**
   com $(AB) = (\mathbf{com}\, A)(\mathbf{com}\, B)$ **et com** $(A^{-1}) = \mathbf{com}\,(A)^{-1}$.

   c) **Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant les scalaires** λ **tels que** $A - \lambda I$ **et** $B - \lambda I$ **soient inversibles.**

   d) **En déduire que si** A **et** B **sont semblables, alors com** A **et com** B **le sont.**