My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مُمُونِي مُولَاي اسمَاعِيل

Feuille d'Exercices

Probabilités

Partie I : Probas Elémentaires et Conditionnelles

Partie I : Probas Conditionnelles

Exercice 1

Dans une loterie, il y a 30 billets dont n sont gagnants. On suppose que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés. On achète 2 billets au hasard. Déterminer la probabilité de ne rien gagner et en déduire la valeur de n à partir de laquelle on a 90% de chance de gagner.

Exercice 2

On jette deux dés non pipés, un dé noir et un dé blanc.
Soient A l'événement : « le chiffre du dé noir est pair », B l'événement : « le chiffre du dé blanc est impair », C l'événement : « les deux chiffres ont même parité ».
Montrer que A et B, A et C, B et C sont indépendants mais que les trois événements A, B et C ne le sont pas.

Exercice 2

On dispose de $2n$ cartons numérotées de 1 à $2n$. On les tire un par un au hasard. Quelle est la probabilité que les numéros impairs soient tous avant les numéros pairs ?

Exercice 3

Soit N un entier strictement positif, et p un réel strictement compris entre 0 et 1.
Une particule se déplace sur une droite en faisant des sauts d'une unité vers la gauche ou vers la droite. A chaque instant, la probabilité qu'elle aille vers la droite est p et celle qu'elle aille vers la gauche $q = 1 - p$, tous ces déplacements étant supposés indépendants.
Initialement, la particule est en $n \in [\![0, N]\!]$, et elle s'arrête dès qu'elle atteint l'une des extrémités de cet intervalle : 0 ou N.
On note q_n la probabilité que la particule s'arrête en 0.

1) a) Justifier que $q_0 = 1$ et $q_N = 0$.
b) Montrer que pour tout n tel que $1 \leqslant n \leqslant N-1$, on a

$$q_n = pq_{n+1} + qq_{n-1}$$

c) En déduire une expression de q_n en fonction de n, N, p et q.
On pensera à distinguer les cas $p = 1/2$ et $p \neq 1/2$.

2) Calculer de même la probabilité p_n que la particule s'arrête en N (mêmes cas).

3) Calculer $p_n + q_n$, et en déduire la probabilité pour que la particule ne s'arrête jamais.

Exercice 4 (Oral CCP)

1) Enoncer et démontrer la formule de BAYES.

2) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 5 (Oral CCP)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n-ème tirage est blanche ».
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.

1) Calculer p_1.

2) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

3) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 6 (Problème Classique : les élections)

Au cours d'une élection, deux candidats A et B s'affrontent. Le candidat A l'emporte sur le candidat B par a voix contre b ($a > b$). On veut calculer la probabilité qu'au cours du dépouillement le candidat A ait été constamment en tête.

1) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points (α, β) et $(\alpha + m, \beta + m)$ où $(\alpha, \beta, m, n) \in \mathbb{N}^4$.
On va de (α, β) à $(\alpha + m, \beta + m)$ par déplacements successifs de une unité vers la droite ou une unité vers le haut à chaque étape. On appelle chemin de (α, β) et $(\alpha + m, \beta + m)$ un tel trajet.
Combien y-a-t-il de chemins de (α, β) et $(\alpha + m, \beta + m)$?

2) a) Montrer qu'un chemin de $(0, 1)$ à (a, b), a au moins un point commun avec la droite Δ d'équation $y = x$.

b) Montrer qu'il y a autant de chemins de $(0, 0)$ à (a, b), passant par $(1, 0)$ et rencontrant la droite Δ d'équation $y = x$ en au moins un point distinct de $(0, 0)$ que de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) passant par $(0, 1)$.

c) En déduire le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) situés en dessous de Δ et ne rencontrant Δ qu'en $(0, 0)$.

3) Déterminer la probabilité qu'au cours du dépouillement le candidat A ait été constamment en tête.

Exercice 6 (Problème Populaire : les allumettes de Banach)

Une personne porte à tout moment deux boîtes d'allumettes, une dans la poche gauche, l'autre dans la poche droite. Chaque fois qu'elle a besoin d'une allumette, elle choisit au hasard dans une de ses boîtes. Elle découvre subitement que la boîte tirée est vide. Les deux boîtes contenaient initialement n allumettes chacune.
Quelle est la probabilité qu'il lui reste k allumettes dans l'autre boîte ?
Quand $n = 6$, combien reste-t-il d'allumettes dans la poche non vide en moyenne ?

Exercice 6 (Problème Classique : Ruine au Jeu)

Deux joueurs A et B qui disposent au départ d'un capital de n et $s - n$ respectivement ($0 \leqslant n \leqslant s$) jouent à pile ou face. Le joueur A parie toujours sur pile, la probabilité de pile est égale à p ($p \in]0, 1[$). A chaque coup, le joueur perdant donne 1 euro à l'autre. Le jeu se poursuit jusqu'à la ruine de l'un des deux joueurs.
Quelles sont les chances de chacun des joueurs de ruiner son adversaire ?

Corrigé

Partie I : Probas Conditionnelles

Exercice 1

La probabilité de ne rien gagner est $p_n = \dfrac{\dbinom{30-n}{2}}{\dbinom{30}{2}} = \dfrac{(30-n)(29-n)}{30\times 29} = \dfrac{n^2-59n+870}{870}$.

$$\begin{aligned}1-p_n \geqslant 0,9 &\Leftrightarrow \frac{n^2-59n+870}{870} \leqslant 0,1 \Leftrightarrow n^2-59n+783 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{59-\sqrt{349}}{2} \leqslant n \leqslant \frac{59+\sqrt{349}}{2}\\ &\Leftrightarrow 20,1\ldots \leqslant n \leqslant 38,8\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 21.\end{aligned}$$

A partir de 21 billets gagnants, on a au moins 9 chances sur 10 de gagner.

Exercice 2

Les résultats de l'expérience sont des couples où la première composante est le numéro obtenu sur le dé noir et la deuxième composante est le numéro obtenu sur le dé blanc. On peut donc prendre $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ puis $\text{card}(\Omega) = 36$.

• $p(A) = \dfrac{3\times 6}{6\times 6} = \dfrac{1}{2}$, $p(B) = \dfrac{6\times 3}{6\times 6} = \dfrac{1}{2}$ et $p(C) = \dfrac{6\times 3}{6\times 6} = \dfrac{1}{2}$.

• $p(A\cap B) = \dfrac{3\times 3}{6\times 6} = \dfrac{1}{4} = p(A)\times p(B)$, $p(A\cap C) = \dfrac{3\times 3}{6\times 6} = \dfrac{1}{4} = p(A)\times p(C)$ et $p(B\cap C) = \dfrac{3\times 3}{6\times 6} = \dfrac{1}{4} = p(B)\times p(C)$.
Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

• $A\cap B\cap C = \varnothing$ et donc $p(A\cap B\cap C) = 0 \neq \dfrac{1}{8} = p(A)\times p(B)\times p(C)$. A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 3

Ω est l'ensemble des permutations de l'ensemble des entiers de 1 à $2n$. $\text{card}(\Omega) = (2n)!$ et les événements élémentaires sont équiprobables.
Pour les cas favorables, il y a $n!$ possibilités pour les n premiers cartons et pour chacune de ces possibilités, il y a $n!$ possibilités pour les n derniers. Il y a donc $n!\times n! = n!^2$ cas favorables. La probabilité demandée est

$$p = \frac{n!\times n!}{(2n)!} = \frac{1}{C_{2n}^n}.$$

2ème cas. Si $p = \frac{1}{2}$, l'équation caractéristique admet une solution réelle double à savoir 1. On sait qu'il existe λ et μ tels que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $q_n = \lambda + \mu n$. Les conditions $q_0 = 1$ et $q_N = 0$ fournissent

$$q_n = \frac{n - N}{-N} = 1 - \frac{n}{N}.$$

2) De nouveau,

1er cas. Si $p \neq \frac{1}{2}$, il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $p_n = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^n$.

Les conditions $p_0 = 0$ et $p_N = 1$ fournissent $\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^N = 1 \end{array}\right.$ et donc $\lambda = \frac{p^N}{p^N - q^N}$ et $\mu = -\frac{p^N}{p^N - q^N}$ puis

$$p_n = \frac{p^N}{p^N - q^N} - \frac{p^N}{p^N - q^N}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n.$$

2ème cas. Si $p = \frac{1}{2}$, il existe λ et μ tels que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $p_n = \lambda + \mu n$. Les conditions $p_0 = 0$ et $p_N = 1$ fournissent

$$p_n = \frac{n}{N}.$$

3) $p_n + q_n = \left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{n}{N} + \frac{n}{N} \text{ si } p = \frac{1}{2} \\ -\frac{(1-p)^N}{p^N - q^N} + \frac{p^N}{p^N - q^N}\left(\frac{q}{p}\right)^n + \frac{p^N}{p^N - q^N} - \frac{p^N}{p^N - q^N}\left(\frac{q}{p}\right)^n \text{ si } p \neq \frac{1}{2} \end{array}\right. = 1.$

La probabilité pour que la particule ne s'arrête jamais est $1 - (p_n + q_n) = 0$.

Exercice 4

1) Formule de Bayes.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.
Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$.
Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors,

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B)}.$$

Démonstration. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Puisque $P(B) \neq 0$,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{P(B)}.$$

Puisque $(A_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P(A_j) \neq 0$, on a

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B).$$

Donc,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B)}.$$

2) a) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

$(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements. On a $P(A) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \neq 0$ et $P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Ensuite $P_A(B) = \frac{1}{2}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{6}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

D'après la formule de Bayes,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\frac{1}{2}$.

b) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient n fois le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

$\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements. On a toujours $P(A) = \frac{1}{4} \neq 0$ et $P\left(\overline{A}\right) = \frac{3}{4}$. Ensuite $P_A(B) = \frac{1}{2^n}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{6^n}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n} \neq 0.$$

D'après la formule de Bayes,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$. Ceci signifie que si au bout d'un grand nombre de lancers, on a obtenu à chaque fois le 6, il est quasiment sûr que le dé est pipé.

Exercice n° 11

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n l'événement « au n-ème tirage, la boule provient de l'urne U_1 » (l'événement $\overline{A_n}$ est donc l'événement « au n-ème tirage, la boule provient de l'urne U_2 »).

1) $\left(A_1, \overline{A_1}\right)$ est un système complet d'événements et $P(A_1) = P\left(\overline{A_1}\right) = \frac{1}{2} \neq 0$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p_1 = P(B_1) = P(A_1) \times P_{A_1}(B_1) + P\left(\overline{A_1}\right) \times P_{\overline{A_1}}(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{17}{35}.$$

La probabilité p_1 que la première boule tirée soit blanche est $\frac{17}{35}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\left(B_n, \overline{B_n}\right)$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P\left(\overline{B_n}\right) \times P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{2}{5} + (1 - p_n) \times \frac{4}{7} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

3) La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.

La fonction affine $x \mapsto -\frac{6}{35} x + \frac{4}{7}$ admet un point fixe et un seul :

$$x = -\frac{6}{35} x + \frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{41}{35} x = \frac{4}{7} \Leftrightarrow x = \frac{20}{41}.$$

On sait alors que pour tout entier naturel non nul n, $p_{n+1} - \frac{20}{41} = -\frac{6}{35}\left(p_n - \frac{20}{41}\right)$ puis que pour tout entier naturel non nul n,

$$p_n - \frac{20}{41} = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{20}{41}\right) = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}\left(\frac{17}{35} - \frac{20}{41}\right) = -\frac{3}{1435} \times \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1},$$

et donc

$$p_n = \frac{20}{41} - \frac{3}{1435} \times \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}.$$

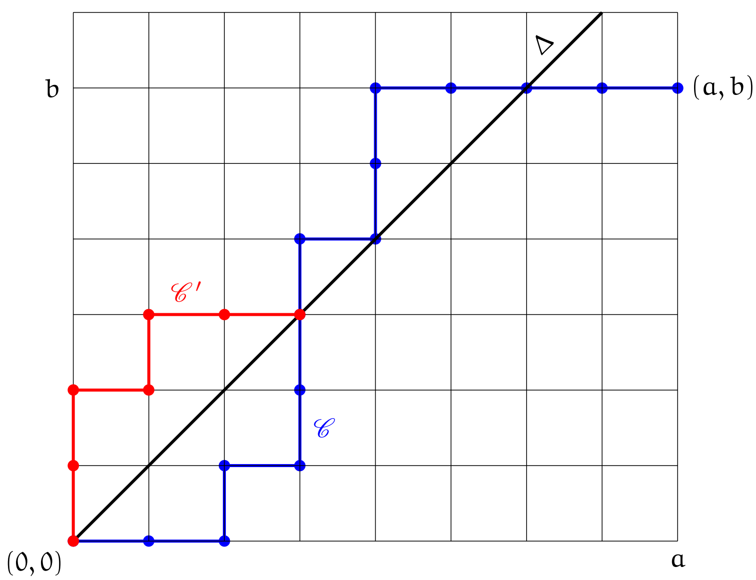
Pour tout entier naturel non nul n, $p_n = \dfrac{20}{41} - \dfrac{3}{1435} \times \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1}$.

Exercice 5

1) Un chemin de (α, β) à $(\alpha + m, \beta + n)$ « est » un mot de $m + n$ lettres comportant m lettres D (pour droite) et n lettes H (pour haut) du type DHHDDDH…H. Le nombre de ces chemins est le nombre de choix des emplacements des m lettres D dans les $m + n$ positions. Il y en a $\dbinom{m+n}{m} = \dfrac{(m+n)!}{m!n!}$.

2) a) Soit $\mathscr{C}$ un chemin allant de $(1, 0)$ à (a, b). Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des abscisses x des points (x, y) de $\mathscr{C}$ tels que $x \leqslant y$. $\mathscr{E}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car $0 \in \mathscr{E}$) et majorée (par a). Donc $\mathscr{E}$ admet un plus grand élément. Notons le c.
De même, on peut définir d la plus grande ordonnée d'un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse c. Par construction, $c \leqslant d$. c n'est pas a car $a > b \geqslant d$ et donc $c \leqslant a - 1$. Par définition de c et d, le point de $\mathscr{C}$ qui suit (c, d) est $(c + 1, d)$ avec $c + 1 > d$. Ainsi, $c \leqslant d$ et $c > d - 1$. On en déduit que $c = d$. Par construction le point (c, c) est un point de $\mathscr{C}$ et de Δ.

b) Notons E l'ensemble des chemins de $(0, 0)$ à (a, b), passant par $(1, 0)$ et rencontrant la droite Δ d'équation $y = x$ en au moins un point distinct de $(0, 0)$ et F l'ensemble des chemins de $(0, 0)$ à (a, b) passant par $(0, 1)$. On va construire une bijection de E sur F.



Soit $\mathscr{C}$ un élément de E. On note $\mathscr{C}_1$ la partie de $\mathscr{C}$ qui va de $(0, 0)$ au premier point de $\mathscr{C}$ autre que $(0, 0)$ qui se trouve sur Δ puis $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_1$. $\mathscr{C}$ ne rencontre pas Δ en (a, b) (car $a > b$) et donc $\mathscr{C}$ rencontre Δ en un point distinct de $(0, 0)$ strictement avant (a, b). Donc $(a, b) \in \mathscr{C}_2$ et en particulier, $\mathscr{C}_2 \neq \varnothing$. De même, $(0, 0)$ et $(1, 0)$ appartiennent à $\mathscr{C}_1$ et donc $\mathscr{C}_1 \neq \varnothing$.
Notons alors $\mathscr{C}_1'$ le symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à Δ et enfin $\mathscr{C}' = \mathscr{C}_1' \cup \mathscr{C}_2$. Puisque $(1, 0) \in \mathscr{C}_1$, $(0, 1) \in \mathscr{C}_1'$ et donc $\mathscr{C}' \in F$.

On considère $f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ \mathscr{C} & \mapsto & \mathscr{C}' \end{array}$. D'après ce qui précède, f est une application de E vers F.

De même, on peut considérer $g : \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & E \\ \mathscr{C} & \mapsto & \mathscr{C}' \end{array}$. D'après a), un chemin $\mathscr{C}$ de F a nécessairement un point commun avec Δ autre que $(0, 0)$. On peut lui appliquer la transformation précédente et on obtient un chemin $\mathscr{C}'$ de E.
Pour tout chemin $\mathscr{C}$ de E, on a $g(f(\mathscr{C})) = \mathscr{C}$ et pour tout chemin $\mathscr{C}'$ de F, on a $f(g(\mathscr{C}')) = \mathscr{C}'$. Donc $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
On sait alors que f est bijective. En particulier, $\mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(E)$.

c) Un chemin de $(0, 0)$ à (a, b) situé en dessous de Δ passe par $(1, 0)$. Le nombre total de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) passant par $(1, 0)$ est encore le nombre total de chemins de $(1, 0)$ à (a, b). Il y en a $\dbinom{a+b-1}{a-1}$ d'après la question 1). Le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) situés en dessous de Δ est la différence entre $\dbinom{a+b-1}{a-1}$ et le nombre de chemin passant par

$(1,0)$ et rencontrant Δ en au moins un point distinct de $(0,0)$ à savoir $\text{card}(E)$. D'après la question b), $\text{card}(E)=\text{card}(F)$ et donc le nombre cherché est

$$\binom{a+b-1}{a-1}-\text{card}(E)=\binom{a+b-1}{a-1}-\text{card}(F)=\binom{a+b-1}{a-1}-\binom{a+b-1}{a}.$$

3) En représentant chaque étape du dépouillement par un couple (x,y) où x est le nombre de voix de A et y est le nombre de voix de B, un dépouillement « est » un chemin de $(0,0)$ à (a,b) et un dépouillement où A est constamment en tête « est » est un chemin de $(0,0)$ à (a,b) situé en dessous de Δ et ne rencontrant Δ qu'en $(0,0)$. La probabilité demandée est donc

$$p=\frac{\binom{a+b-1}{a-1}-\binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}}=\left(\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!b!}-\frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!}\right)\frac{a!b!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a+b}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Exercice 6

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ puis $k\in[\![1,n]\!]$.

Supposons par exemple que la personne se rende compte que la boîte d'allumettes qui est dans sa poche gauche est vide. A chaque étape, on peut représenter le nombre d'allumettes de chaque boîte par un couple (x,y) où x est le nombre d'allumettes prises dans la poche gauche et y est le nombre d'allumettes de la poche droite.

Prendre une allumette à la fois dans l'une ou l'autre poche consiste à ajouter 1 à x ou à y et donc à faire un déplacement d'une unité vers la droite ou vers le haut. On veut prendre n allumettes dans la poche gauche et $n-k$ dans la poche droite (pour qu'il en reste k) et donc on veut atteindre le point $(n,n-k)$. Tout ceci permet d'identifier une succession de prises d'allumettes nous laissant une boîte vide à gauche et une boîte contenant k allumettes à droite à un chemin joignant le point $(0,0)$ au point $(n,n-k)$ comme dans l'exercice précédent.

On se rend compte que la boîte de la poche gauche est vide en effectuant un déplacement supplémentaire vers la droite. Le nombre de prises d'allumettes cherché est donc le nombre de chemins joignant $(0,0)$ à $(n+1,n-k)$ et se terminant par un déplacement vers la droite. Il y en a autant que de chemins joignant $(0,0)$ à $(n,n-k)$ à savoir $\binom{2n-k}{n}$. Un chemin joignant $(0,0)$ à $(n+1,n-k)$ est de longueur $2n-k+1$. Comme à chaque étape, la probabilité de choisir une des deux boîtes est $\frac{1}{2}$ et que les choix successifs sont mutuellement indépendants, la probabilité d'un tel chemin est $\frac{1}{2^{2n-k+1}}$. La probabilité qu'on se rende compte que la boîte gauche est vide et que la boîte droite contient k allumettes est $\frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k+1}}$.
Cette probabilité est la même si c'est la boîte droite qui est vide et la boîte gauche contient k allumettes. La probabilité demandée est

$$p=2\times\frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k+1}}=\frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k}}.$$

En moyenne, il reste dans la poche pas vide $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k}}$ ce qui s'écrit quand $n=6$,

$$\sum_{k=1}^{6}k\frac{\binom{12-k}{6}}{2^{12-k}}=\frac{462}{2^{11}}+\frac{420}{2^{10}}+\frac{252}{2^{9}}+\frac{112}{2^{8}}+\frac{35}{2^{7}}+\frac{6}{2^{6}}=\frac{3958}{2048}=1,9\ldots$$

Exercice 7

La situation est la même que celle de l'exercice n° 9 où on remplace la particule et sa position initiale par la somme que possède le joueur A initialement à savoir n. Celui-ci est ruiné si son capital arrive à 0 et son adversaire est ruiné si le capital du joueur A arrive à $n+s-n=s$.
On reprend les notations du n° 9 en remplaçant simplement N par s. q_n est alors la probabilité que A soit ruiné et p_n est la probabilité que B soit ruiné.

La probabilité que A soit ruiné est $-\dfrac{(1-p)^s}{p^s-(1-p)^s}+\dfrac{p^s}{p^s-(1-p)^s}\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^n$ si $p\neq\dfrac{1}{2}$ et $1-\dfrac{n}{s}$ si $p=\dfrac{1}{2}$.

La probabilité que B soit ruiné est $\dfrac{p^s}{p^s-(1-p)^s}-\dfrac{p^s}{p^s-(1-p)^s}\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^n$ si $p\neq\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{n}{s}$ si $p=\dfrac{1}{2}$.

On peut noter que la probabilité qu'un des deux joueurs soit ruiné en un temps fini est $p_n+q_n=1$ dans tous les cas.