Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مُوني مُولاي اسماعيل

Feuille d'Exercices

Calcul Différentiel

Exercice 1 : On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[$ et $\forall\, t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 2 :

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E) .

Exercice 3 : On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice 4 :

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t}dt$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Exercice 5 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} .$$

1. Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.

(c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6 :

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de "f différentiable en $(0,0)$".
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 :

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
   Soit $a \in E$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

   Donner la définition de "f différentiable en a".
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
   Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
   On pose : $\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|,$ où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
   On pose : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \|(x,y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.

   On admet que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|.\|$ est une norme sur $E \times E$.
   Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.

   (a) Prouver que $\exists\, C \in \mathbb{R}^+ /\ \forall\, (x,y) \in E \times E,\ |B(x,y)| \leqslant C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$.
   (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

Exercice 8 :

1) Etudier le prolongement par continuité probable en $(0,0)$ des fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x,y) = \dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x)\sin(y)-\sin(xy)}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^4}}$

2) Lorsque les fonctions sont prolongeables par continuité, étudier la différentiabilité des fonctions.

Exercice 9 : Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 10 :

1) Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe M^3.
Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et préciser sa différentielle en tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Mêmes questions pour $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à M associe $\mathrm{tr}(M^4)$.

3) Mêmes questions pour $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à M associe $\det(M)$.

Exercice 11 : Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P^2(t)\,dt$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

Exercice 12 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \big(2xy, \arctan(x+y), \cos(2x^2+y)\big)$$

1) Calculer, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, $df(a,b)(h,k)$.

2) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \big(\sin(t), t - \sin^2(t)\big)$$

(a) Calculer $\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) En déduire la dérivée de $t \mapsto f \circ \varphi(t)$

(c) Retrouver le résultat en commençant par calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f \circ \varphi(t)$.

Exercice 13 : Soit f l'application de $\mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe M^{-1}.
Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$ et que, pour $A \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$, on a $df(A) : M \mapsto -A^{-1}MA^{-1}$

Exercice 14 : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions g et h suivantes :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(y,z,x) \end{array} \quad , \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(y,x,x+y) \end{array}$$

Calculer les dérivées partielles premières de g et h en fonctions de celles de f.
Retrouver les résultats en calculant les différentielles.

Exercice 15 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall t > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

1) Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

2) Etablir la réciproque.

Exercice 16 : Rechercher les extremum locaux des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

2) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

3) $f(x,y) = x\left(\ln^2(x) + y^2\right)$

Exercice 17 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

2) A l'aide de l'étude en $(0,0)$ montrer qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

Exercice 18 : Point non extrémal

On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2} \quad \text{si } (x,y) \neq 0, \qquad f(0,0) = 0.$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé et $g_\theta(r) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que g_θ admet un minimum local strict en $r = 0$.

3) Calculer $f(x, x^2)$. Conclusion ?

Exercice 19 :

Etudier les extremums de $(x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Exercice 20 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ la fonction f par $f(x,y) = x + y + \frac{a}{xy}$.

Montrer que f admet un minimum strict.

Exercice 21 : Déterminer

$$\sup_{(x,y)\in[0,\pi/2]^2} (\sin(x)\sin(y)\sin(x+y))$$

Exercice 22 : Etudier les extremums de $(x,y) \mapsto 9 + 14x + 4y + x^2 - 8xy - 8y^2 + xy^2 + 2y^3$

Exercice 23 :

Déterminer les fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2+x}{y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2+y}{x} \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1-y}{(x+y+1)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2+x}{(x+y+1)^2} \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x+y)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2}{(x+y)^2} \end{cases}$

Exercice 24 :

Résoudre l'équation $2\dfrac{\partial f}{\partial x} + 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4f$ avec la *condition aux limites* : $f(t,t) = t$ $(t \in \mathbb{R})$.

Exercice 25 : Déterminer les applications f de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = a$ où a est une constante réelle donnée.

Exercice 26 : Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $U = \{(x,y) \text{ tq } x > 0,\ y > 0\}$. Trouver les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2$. On utilisera le changement de variable : $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$.

Exercice 27 : Résoudre sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $x\dfrac{\partial f}{\partial x} = -y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, en posant $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$

Exercice 28 : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0\}$. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

où f est une fonction inconnue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq \beta$. On fait le changement de variables : $u = x + \alpha y$, $y = x + \beta y$.

1) Ecrire l'équation aux dérivées partielles obtenue après le changement de variables.

2) En déduire que l'on peut ramener l'équation de départ à l'une des trois formes réduites suivantes :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$$

Exercice 29 :

Trouver les applications $f : (\mathbb{R}^{+*})^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant : $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} + 2xy \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 0$. On utilisera le changement de variables : $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

Exercice 30 : On considère la fonction f, définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3) Exprimer $Df(x)$, puis $f(x)$ sans intégrale.

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

Exercice 31 : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$, et $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$.

1) Démontrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Préciser leurs dérivées.

2) Démontrer que $f + g^2$ est constante.

3) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 32 :

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1} + t + 1} dt$.

Déterminer son domaine de définition ; étudier sa continuité et sa monotonie.

Calculer $\displaystyle\int_{t=1}^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1} + t} dt$ et en déduire des équivalents et les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 33 : Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. Le but de cet exercice est de prouver que P admet une racine dans $\mathbb{C}$. On suppose au contraire que P ne s'annule pas et on considère pour $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $f(r, \theta) = \dfrac{r^n e^{in\theta}}{P(re^{i\theta})}$ et $F(r) = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi} f(r, \theta)\, d\theta$.

1) Montrer que F est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

2) Vérifier que $ir \dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$. En déduire que F est constante.

3) Obtenir une contradiction.