Feuille d'Exercices : Réduction

Partie 1 : sev supplémentaires

Exercice 1 Vérifier dans chacun des cas suivants que F et G sont 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :
1) $E=\mathbb{R}^4$, $F=\{(x,y,z,t)\in E\ /\ x+y+z=0\}$, $G=\text{Vect}\left(\overrightarrow{u}=(1,1,1,1)\right)$.
2) $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ {}^tA=A\}$, $G=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ {}^tA=-A\}$.
3) $E=\mathbb{R}[X]$, $F=\{P\in\mathbb{R}[X]\ /\ P(1)=P(2)=0\}$, $G=\mathbb{R}_1[X]$.
4) $E=F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F=\text{Vect}\left(x\longmapsto x^2\right)$, $G=\{f\in E\ /\ f(-1)=0\}$.

Exercice 2 Pour tout réel a, on note P_a l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont périodiques de période a.
1) Vérifier que P_a est un espace vectoriel.
2) Les ensembles $P_{\frac{2\pi}{3}}$ et $P_{\frac{\pi}{2}}$ sont-ils en somme directe ?

Exercice 3 Soit $E=\left\{P\in\mathbb{R}[x]\ /\ \int_0^1 xP(x)\,dx=0\right\}$.
1) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.
2) Soit $B_1(x)=x$. Démontrer que E et $\text{Vect}(B_1)$ sont en somme directe.

Exercice 4 Soit $E=\mathbb{R}^3$, $F=\left\{\{x,y,z\}\in\mathbb{R}^3\ /\ x+y-z=0\right\}$ et $G=\text{Vect}\,[(2,-1,0)]$.
1) Démontrer que $E=F\oplus G$.
2) Déterminer la matrice P , dans la base canonique de E,de la projection p sur F parallèlement à G.
3) En déduire la matrice S, dans la base canonique de E,de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $f\in\mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2=\text{Id}$, où Id désigne l'identité dans E. Démontrer que $E=\text{Ker}(f+\text{Id})\oplus\text{Ker}(f-\text{Id})$.

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $f\in\mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2-3f-4\text{Id}=0$, où Id désigne l'identité dans E. Démontrer que $E=\text{Ker}(f+\text{Id})\oplus\text{Ker}(f-4\text{Id})$.

Exercice 7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $b\in E$ donné. Soit p un projecteur de E donné. Résoudre l'équation d'inconnue x : $x+p(x)=b$.

Exercice 8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $b\in E$ donné. Soit s une symétrie de E donnée. Résoudre l'équation d'inconnue x : $x+2s(x)=b$.

Exercice 9 Soient E un espace vectoriel, A, B, C trois sous-espaces de E. Montrer que si $A+C=B+C$, $A\cap C=B\cap C$ et $A\subset B$, alors $A=B$.

Exercice 10 Soient E un espace vectoriel, A, B, C trois sous-espaces de E.
1) Montrer que $A+(B\cap C)\subset(A+B)\cap(A+C)$. A l'aide d'un contre-exemple choisi dans le plan $\mathbb{R}^2$, montrer que l'inclusion inverse est fausse.
2) Vérifier qu'il existe une inclusion entre les deux ensembles $A\cap(B+C)$ et $(A\cap B)+(A\cap C)$. Infirmer l'autre inclusion en s'aidant d'un contre-exemple.

Exercice 11 On pose $E=\mathbb{R}_2[X]$, $F=\left\{P\in E,\ \int_0^1 P(t)\,dt=0\right\}$, $G=\text{Vect}\left(1+X+X^2\right)$.
1) Démontrer que $E=F\oplus G$.
2) Soit p la projection sur F parallèlement à G. Pour tout $P\in\mathbb{R}_2[X]$, déterminer $p(P)$ en fonction de $\int_0^1 P(t)\,dt$.

Exercice 12 Soient E un espace vectoriel et F, G, C trois sous-espaces vectoriels de E tels que C soit un supplémentaire de $F\cap G$ dans G. Montrer que $F+G=F\oplus C$.

Solutions des exercices

Exercice 1 1) F et G sont deux sous-espaces vectoriels (hyperplan et droite vectorielle) de E. Il reste alors à vérifier que tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme la somme d'un vecteur de F avec un vecteur de G :

On a $\overrightarrow{f} = (a, b, c, d) \in F \Longleftrightarrow a = -b - c \Longleftrightarrow \overrightarrow{f} = (-b - c, b, c, d)$.

$\overrightarrow{g} \in G \Longleftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}$ tel que $g = e(1, 1, 1, 1) = (e, e, e, e)$. Posons $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t)$ un vecteur quelconque de E. Cherchons s'il est possible d'écrire $\overrightarrow{u}$ comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On résout le système d'inconnues b, c, d, e :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -b - c + e = x \\ b + e = y \\ c + e = z \\ d + e = t \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -b - c + e = x \\ b = y - e \\ c = z - e \\ d = t - e \end{array} \right.$$

En remplaçant b et c par leurs valeurs dans la première équation, il vient $3e - y - z = x$ d'où $e = \dfrac{1}{3}(x + y + z)$. En réinjectant dans les trois dernières équations, on voit donc que le système admet une seule solution, ce qui signifie qu'on peut toujours décomposer un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E comme la somme d'un vecteur $\overrightarrow{f}$ de F avec un vecteur $\overrightarrow{g}$ de G et ce, de manière unique. On a donc prouvé que F et G sont supplémentaires dans E.

2) On observe que F est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques, tandis que G est le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques. Traitons le problème par analyse et synthèse :

Analyse : Supposons que la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrive :

$$M = S + A, \tag{7}$$

avec $S \in F$ et $A \in G$. On aura alors ${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$. La relation $M = S + A$ donne

$${}^tM = {}^t(S + A) = {}^t(S) + {}^t(A) = S - A. \tag{8}$$

En ajoutant et soustrayant (7) et (8), il vient $S = \frac{1}{2}(M +{}^t M)$ et $A = \frac{1}{2}(M -{}^t M)$.

Ainsi, S et A, si elles existent, sont uniques.

Synthèse : Partant d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, posons $S = \frac{1}{2}(M +{}^t M)$ et $A = \frac{1}{2}(M -{}^t M)$. On a alors clairement $S + A = M$. De plus, on a ${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$ et de même, on a ${}^tA = -A$. Ainsi, il est bien possible d'écrire une matrice quelconque, de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Conclusion : F et G sont bien supplémentaires dans E.

3) Puisque F est l'ensemble des polynômes admettant 1 et 2 pour racines, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes de la forme $A(X)(X - 1)(X - 2)$, dire que F et G sont supplémentaires dans E revient ici à affirmer que tout polynôme P s'écrit de manière unique sous la forme $P(X) = A(X)(X - 1)(X - 2) + B(X)$ avec $\deg B \leq 1$. Or ce résultat découle directement du théorème de la division euclidienne : la division de P par $(X - 1)(X - 2)$ s'écrit en effet

$$\exists!\,(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2 \text{ tel que } P(X) = Q(X)(X - 1)(X - 2) + R(X)$$

avec $\deg R < 2$, donc $\deg R \leq 1$. Les espaces F et G sont donc supplémentaires dans E.

4) On veut prouver que toute fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique sous la forme $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Analyse : Supposons que l'on ait $h = f + g$ avec $f(x) = ax^2$ et $g(-1) = 0$. On a donc $h(-1) = f(-1) + g(-1) = a$. Ainsi, a est unique. On a aussi $g(x) = h(x) - ax^2$ défini de manière unique.

Synthèse : Partant de h, fonction quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, posons $a = h(-1)$. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 = h(-1)x^2$ et $g(x) = h(x) - f(x) = h(x) - h(-1)x^2$. On a alors clairement :

a) $f + g = h$;

b) $g(-1) = h(-1) - h(-1)(-1)^2 = 0$ donc $g \in G$;

c) Puisque $f(x) = ax^2$, $f \in F$.

Conclusion **:** F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 2 1) P_a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ puisque $P_a \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $P_a \neq \emptyset$ puisque la fonction nulle est périodique de période a donc est dans P_a. Enfin, si f et g sont deux fonctions de P_a, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+a) = f(x)$ et $g(x+a) = g(x)$. Donc, pour tous réels λ et μ, on a

$$(\lambda f + \mu g)(x+a) = \lambda f(x+a) + \mu g(x+a) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x),$$

ce qui signifie que $\lambda f + \mu g$ est périodique de période a, c'est-à-dire que $\lambda f + \mu g \in P_a$.

2) Les ensembles $P_{\frac{2\pi}{3}}$ et $P_{\frac{\pi}{2}}$ ne sont pas en somme directe, puisque $P_{\frac{2\pi}{3}} \cap P_{\frac{\pi}{2}} \neq \{0\}$. En effet, $P_{\frac{2\pi}{3}} \cap P_{\frac{\pi}{2}}$ est l'ensemble des fonctions qui sont à la fois $\frac{2\pi}{3}$ périodiques et $\frac{\pi}{2}$ périodiques. Les fonctions périodiques de période $\frac{\pi}{6}$ sont donc dans $P_{\frac{2\pi}{3}} \cap P_{\frac{\pi}{2}}$ car $\frac{\pi}{2} = 3 \times \frac{\pi}{6}$ et $\frac{2\pi}{3} = 4 \times \frac{\pi}{6}$.

Exercice 3 1) On a clairement $E \subset \mathbb{R}[x]$ et $0 \in E$. Montrons que E est stable par combinaison linéaire. Soient P et Q deux éléments de E ; ils vérifient donc la propriété caractéristique des éléments de E, c'est-à-dire

$$\int_0^1 xP(x)\,dx = 0 \text{ et } \int_0^1 xQ(x)\,dx = 0. \tag{9}$$

Soient a et b deux réels, il s'agit de montrer que $aP + bQ \in E$, c'est-à-dire vérifie la propriété caractéristique des éléments de E. On calcule donc :

$$\int_0^1 x(aP+bQ)(x)\,dx = \int_0^1 x[aP(x) + bQ(x)]\,dx = a\int_0^1 xP(x)\,dx + b\int_0^1 xQ(x)\,dx.$$

En utilisant (9), on obtient $\int_0^1 x(aP+bQ)(x)\,dx = 0$. Donc $aP + bQ \in E$, et E est un sev de $\mathbb{R}[x]$.

2) Soit $P \in E \cap \text{Vect}(B_1)$. Cela signifie que $P \in E$ et $P \in \text{Vect}(B_1)$.

Puisque $P \in \text{Vect}(B_1)$, $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aB_1$, d'où $P(x) = aB_1(x) = ax$.

Puisque $P \in E$, P vérifie la propriété caractéristique des éléments de E. Donc

$$\int_0^1 xP(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 x.ax\,dx = 0 \Leftrightarrow a\int_0^1 x^2\,dx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}a = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Puisque $P(x) = ax$, il vient $P(x) = 0$. Ainsi le seul polynôme qui soit à la fois dans E et dans $\text{Vect}(B_1)$ est le polynôme nul. Donc $E \cap \text{Vect}(B_1) = \{0\}$, ce qui signifie que E et $\text{Vect}(B_1)$ sont en somme directe.

Exercice 4 1) F est un plan vectoriel, donc de dimension 2, G est de dimension 1. On a donc $\dim \mathbb{R}^3 = \dim F + \dim G$. De plus, le vecteur directeur de G n'est pas dans F. Donc $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. On en déduit que $E = F \oplus G$.

2) Pour déterminer l'expression de la projection p, on détermine la matrice de p dans une "bonne" base (voir notamment l'exemple 44.11 de TLM1).

Une base de F est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ obtenue en exprimant z en fonction de x et y.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de G.

Ainsi $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de E. La matrice de P dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après les formules de changement de base, la matrice de p dans la base canonique est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(le calcul de l'inverse de la matrice de passage est laissé au lecteur).

3) On sait que $s = 2p - x$, donc $S = 2P - I_3$, c'est-à-dire

$$S = 2\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Dire que $x \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ revient à dire que $(f + \mathrm{Id})(x) = 0$, c'est-à-dire que $f(x) + x = 0$, ou encore $f(x) = -x$. De même $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow f(x) = x$. Procédons par analyse et synthèse :

Analyse : pour tout $x \in E$, on cherche à écrire x sous la forme $x = y + z$, avec $y \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $z \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Alors on a nécessairement : $f(x) = f(y) + f(z) = -y + z$. En additionnant et soustrayant l'expression de x et celle de $f(x)$, on obtient

$$y = \frac{1}{2}(x - f(x)) \;\; ; \;\; z = \frac{1}{2}(x + f(x)). \tag{10}$$

Donc si x se décompose sous la forme de la somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, cette décomposition est unique et elle est donnée par (10).

Synthèse : vérifions que y et z définis par (10) répondent au problème posé. On a d'abord $y + z = x$. Par ailleurs

$$f(y) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f^2(x)\right] = \frac{1}{2}[f(x) - x] = -y.$$

Donc $y \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$. De même $f(z) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f^2(x)\right] = \frac{1}{2}[f(x) + x] = z$.

Donc $z \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Ainsi tout $x \in E$ se décompose, de manière unique, comme la somme d'un élément $y \in \ker(f + \mathrm{Id})$ et d'un élément $z \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, la décomposition étant donnée par $(**)$. Donc $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 6 On procède de même. Dire que $x \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ revient à dire que $f(x) = -x$. Et $x \in \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}) \Leftrightarrow f(x) = 4x$.

Analyse : si $x = y + z$, avec $y \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $z \in \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id})$. Alors on a : $f(x) = f(y) + f(z) = -y + 4z$. On obtient donc :

$$y = \frac{1}{5}(4x - f(x)) \;\; ; \;\; z = \frac{1}{5}(x + f(x)). \tag{11}$$

Donc si x se décompose sous la forme de la somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id})$, cette décomposition est unique et elle est donnée par (11).

Synthèse : on vérifie que y et z définis par (11) répondent au problème posé. On a d'abord $y + z = x$. Par ailleurs, puisque $f^2 = 3f + 4$,

$$f(y) = \frac{1}{5}\left[4f(x) - f^2(x)\right] = \frac{1}{5}[4f(x) - 3f(x) - 4x] = \frac{1}{5}[f(x) - 4x] = -y.$$

Donc $y \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$. De même $f(z) = \frac{1}{5}\left[f(x) + f^2(x)\right] = \frac{1}{5}[f(x) + 3f(x) + 4x] = 4z$.

Donc $z \in \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id})$. Ainsi tout $x \in E$ se décompose, de manière unique, comme la somme d'un élément $y \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et d'un élément $z \in \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id})$, la décomposition étant donnée par (11). Donc $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 7 On sait que, pour tout projecteur, $p^2 = p$. Si $x + p(x) = b$, alors

$$p(x + p(x)) = p(b) \Rightarrow p(x) + p^2(x) = p(b) \Rightarrow p(x) = \tfrac{1}{2}p(b).$$

En reportant dans l'équation de départ, on obtient $x = b - p(x) = b - \frac{1}{2}p(b)$.

Donc, si x est solution de l'équation de départ, alors x a cette valeur. Réciproquement,

$$x + p(x) = b - \frac{1}{2}p(b) + p(b) - \frac{1}{2}p^2(b) = b - \frac{1}{2}p(b) + p(b) - \frac{1}{2}p(b) = b.$$

Donc l'équation $x + p(x) = b$ admet une solution et une seule : $x = b - \frac{1}{2}p(b)$.

Exercice 8 Pour tout projecteur, $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Si $x + 2s(x) = b$, alors

$$s(x + 2s(x)) = s(b) \Rightarrow s(x) + 2s^2(x) = s(b) \Rightarrow s(x) + 2x = s(b).$$

En multipliant par 2 et en soustrayant à l'équation de départ, il vient $x = \frac{1}{3}[2s(b) - b]$.

Si x est solution de l'équation de départ, alors x a cette valeur. Réciproquement,

$$x+2s(x)=\frac{1}{3}[2s(b)-b]+\frac{2}{3}\left[2s^2(b)-s(b)\right]=\frac{1}{3}[2s(b)-b]+\frac{2}{3}[2b-s(b)]=b.$$

Donc l'équation $x+2s(x)=b$ a pour unique solution $x=b-\frac{1}{2}p(b)$.

Exercice 9 On sait déjà que $A\subset B$, il reste donc à montrer que $B\subset A$. Soit donc $b\in B$. On a $b=b+0\in B+C$ car C est un sous-espace vectoriel de E, donc $0\in C$. Puisque $B+C=A+C$, on peut donc écrire $b=a+c$, avec $a\in A$ et $c\in C$. On aimerait obtenir que $b\in A$, il suffirait donc que $c\in A$. Or, on a $c=b-a$ avec $b\in B$ et $a\in A\subset B$. Puisque B est un sous-espace vectoriel de E, on a donc $c\in B$. Or, on sait que $c\in C$ donc $c\in C\cap B$ qui, par hypothèse, vaut $C\cap A$. Finalement, $c\in A$ et donc $b=a+c\in A$.

Exercice 10 1) Soit $x\in A+(B\cap C)$ On peut donc écrire $x=a+y$ avec $a\in A$ et $y\in B\cap C$. Puisque $y\in B$, alors $x=a+y\in A+B$ et puisque $y\in C$, alors $x=a+y\in A+C$. Finalement, on a $x\in(A+B)\cap(A+C)$ et donc on vient de montrer que $A+(B\cap C)\subset(A+B)\cap(A+C)$.

Pour l'inclusion réciproque, cinsidérons l'exemple suivant : si A,B et C sont trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ telles que leurs intersections deux à deux soient réduites au vecteur nul, alors on a :

$A+(B\cap C)=A+\left\{\overrightarrow{0}\right\}=A\neq(A+B)\cap(A+C)=\mathbb{R}^2\cap\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^2.$

L'inclusion réciproque est donc fausse.

2) Soit $x\in(A\cap B)+(A\cap C)$. On peut donc écrire $x=b+c$ avec $b\in A\cap B$ et $c\in A\cap C$. Puisque b et c sont dans A, alors $x=b+c\in A$. Puisque $b\in B$ et $c\in C$, alors $x=b+c\in B+C$. Ainsi $x\in A\cap(B+C)$, et $(A\cap B)+(A\cap C)\subset A\cap(B+C)$.

En reprenant l'exemple de la question précédente, on a

$A\cap(B+C)=A\cap P=A\neq(A\cap B)+(A\cap C)=\left\{\overrightarrow{0}\right\}+\left\{\overrightarrow{0}\right\}=\left\{\overrightarrow{0}\right\}.$

Exercice 11 1) Pour tout $P\in\mathbb{R}_2[x]$, cherchons à décomposer :

$$P(x)=a\left(x^2+x+1\right)+Q(x)\tag{12}$$

avec $\int_0^1 Q(x)\,dx=0$. En intégrant (12) entre 0 et 1, on obtient $\int_0^1 P(x)\,dx=a\int_0^1\left(x^2+x+1\right)dx=\frac{11}{6}a$.

Ainsi $a=\frac{6}{11}\int_0^1 P(x)\,dx$ et $Q(x)=P(x)-\frac{6}{11}\left(\int_0^1 P(x)\,dx\right)\left(x^2+x+1\right)$.

Donc, si la décomposition de P comme somme d'un élément K de F et d'un élément Q de G existe, celle-ci est unique et elle est donnée par

$$H(x)=\left(\frac{6}{11}\int_0^1 P(x)\,dx\right)\left(x^2+x+1\right)\ ;\ Q(x)=P(x)-\frac{6}{11}\left(\int_0^1 P(x)\,dx\right)\left(x^2+x+1\right).$$

Réciproquement, on a bien $H\in F$ et $H+Q=P$. Il reste à prouver que $Q\in G$. Or :

$$\int_0^1 Q(x)\,dx=\int_0^1\left[P(x)-\frac{6}{11}\left(\int_0^1 P(x)\,dx\right)\left(x^2+x+1\right)\right]dx=\int_0^1 P(x)\,dx-\frac{6}{11}\left(\int_0^1 P(x)\,dx\right)\int_0^1\left(x^2+x+1\right)dx=0.$$

Donc on a bien $E=F\oplus G$.

2) D'après ce qui précède, on a $p(P)=Q$.

Exercice 12 On suppose donc que $G=(F\cap G)\oplus C$. Ainsi, C est un sous-espace vectoriel de G. On a alors $C\subset G$ et donc $F\cap C=F\cap(C\cap G)=(F\cap G)\cap C$. Or,on sait que la somme $(F\cap G)+C$ est directe et donc $(F\cap G)\cap C=\{0\}$. Ceci implique que $F\cap C=\{0\}$, c'est-à-dire que la somme $F+C$ est directe.

Il nous reste à prouver que $F+G=F+C$. L'inclusion $F+C\subset F+G$ provient simplement du fait que $C\subset G$. Pour l'inclusion inverse, soit $x\in F+G$. On peut donc l'écrire $x=f+g$ avec $f\in F$ et $g\in G$. Or, $G=(F\cap G)\oplus C$, on peut donc écrire $g=f_2+c$ avec $f_2\in F\cap G$ et $c\in C$. On a donc $x=(f+f_2)+c\in F+C$.