

Nature et somme d'une série numérique

Exercice 1 : Établir la convergence et déterminer la somme des séries suivantes.

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ | 2. $\sum \frac{n^2 2^n}{n!}$ | 3. $\sum_{n \geq 2} \frac{3n+2}{n(n^2-1)}$ |
| 4. $\sum \text{Arctan} \left(\frac{1}{n^2+n+1} \right)$ | 5. $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right)$ | 6. $\sum \frac{n^2+n-1}{n!}$ |

Exercice 2 : Déterminez la nature des séries suivantes.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \ln(n)}{e^n}$ | 2. $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n) n^2}$ | 3. $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Arctan}(n)}{n^2}$ |
| 4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ | 5. $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)$ | 6. $\sum_{n \geq 1} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ |

Exercice 3 : Étudiez la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$.

Comparaisons séries-intégrales

Exercice 4 : Séries de Bertrand

1. Déterminez en fonction de $\beta \in \mathbf{R}$ la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$.
2. Montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 5 : Étudiez en fonction de α la nature de la série $\sum \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n^\alpha}$.

Exercice 6 : Équivalents des sommes partielles et des restes pour une série de Riemann

Soit $\alpha > 0$. On pose pour $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ et si $\alpha > 1$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. On suppose que $0 < \alpha < 1$. Déterminez un équivalent de S_n .

2. On suppose que $\alpha > 1$. Déterminez un équivalent de R_n .

Convergence des séries à termes positifs

Exercice 7 : Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Étudiez les séries de termes généraux

- | | | |
|------------|---------------------------|------------------------|
| 1. u_n^2 | 2. $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ | 3. $\frac{u_n}{1+u_n}$ |
|------------|---------------------------|------------------------|

Exercice 8 : Règle de D'Alembert — Soit (u_n) strictement positive telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

1. On suppose que $\ell < 1$. Soit $k \in]\ell, 1[$, montrez qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $u_{n+1} \leq k u_n$. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.
2. On suppose que $\ell > 1$. Montrez qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n+1}$. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge.
3. On suppose que $\ell = 1$. Montrez que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$ alors la série $\sum u_n$ diverge mais qu'on ne peut pas conclure de façon générale lorsque $\ell = 1$.

Convergence des séries à termes non positifs

Exercice 9 : Séries alternées — Soit $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de limite nulle.

On étudie la série $\sum (-1)^n v_n$. On note pour $n \in \mathbf{N}$ S_n la somme partielle d'indice n de cette série.

1. Démontrez que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la série $\sum (-1)^n v_n$ converge.
3. Démontrez pour tout entier naturel, $|R_n| \leq v_{n+1}$.

Liens entre suites et séries

Exercice 10 : Série harmonique et constante d'Euler —. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

1. Montrez que (u_n) converge. On note $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. γ est appelée la constante d'Euler.
2. En déduire un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.
3. Déterminez la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{1 + 2 + \dots + n}$, et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})$.

Exercice 11 : Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

— Développement en séries de Taylor —

Exercice 12 : Séries exponentielles

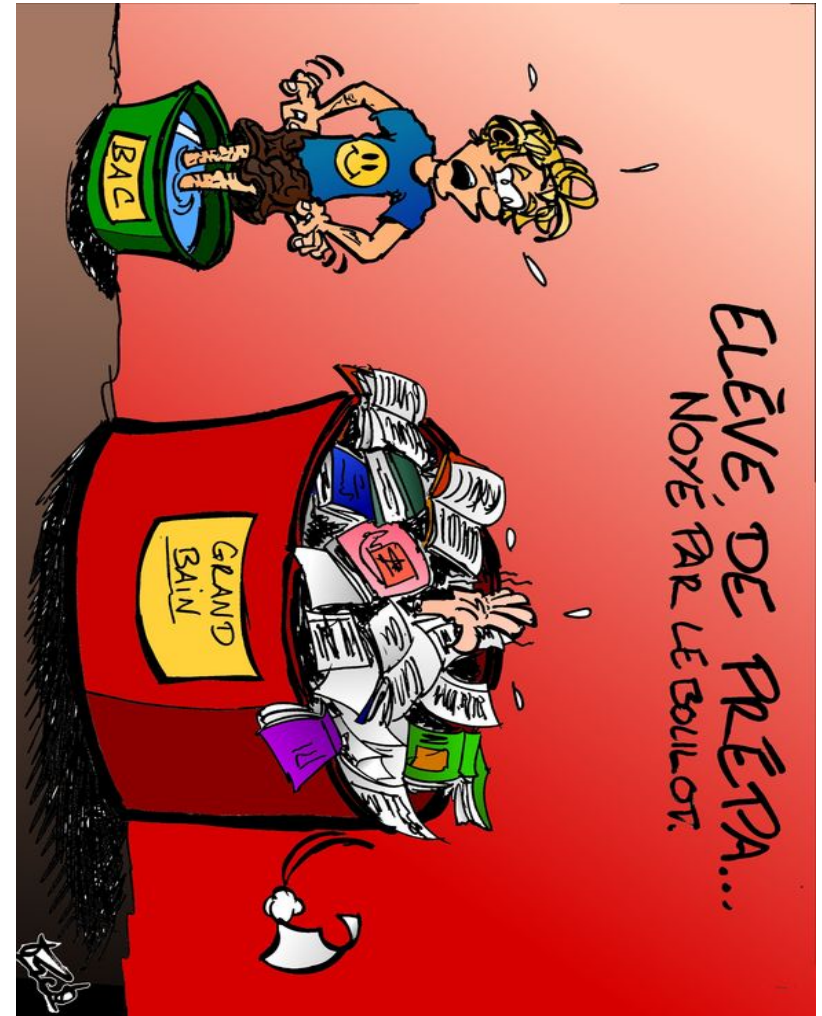
Montrez que pour tout nombre réel x , la série $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente de somme $\exp(x)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

Exercice 13 : Séries sinus et cosinus

Montrez que pour tout nombre réel $x \in \mathbf{R}$, les séries $\sum_n (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_n (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sont convergentes et :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$.



CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1. — 1. Le terme général est une fraction rationnelle. On applique la méthode frac et on décompose le terme général en éléments simples de première espèce : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Il s'écrit comme différence de deux termes consécutifs d'une même suite, il y a **télescopage**. On peut alors expliciter la somme partielle d'indice n

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Par définition, $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge et a pour somme 1.

2. La présence du nombre factoriel au dénominateur suggère que nous sommes en présence d'une série exponentielle. On applique la méthode Pnxn :

$$\frac{k^2 2^k}{k!} = \frac{[k(k-1) + k] 2^k}{k!} = \frac{k(k-1)}{k!} 2^k + \frac{k}{k!} 2^k$$

On explicite alors la somme partielle d'indice n : commentaire on observe d'abord On peut **alors** simplifier les nombres factoriels et enfin effectuer les changements d'indice qui vont bien !

la nullité des premiers termes dans chacune des deux sommes.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{k^2 2^k}{k!} &= \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{k!} 2^k + \sum_{k=0}^n \frac{k}{k!} 2^k = \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{k!} 2^k + \sum_{k=1}^n \frac{k}{k!} 2^k \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} 2^k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} 2^k = 4 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^k}{k!} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!} \end{aligned}$$

On note pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ $E_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!}$ la somme partielle d'indice n de la série exp(2). On peut alors réécrire la somme partielle de notre série sous la forme

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k^2 2^k}{k!} = 4E_{n-2} + 2E_{n-1}$$

Comme la suite (S_n) converge vers e^2 , il en résulte par opérations algébriques sur des suites convergentes que (S_n) converge vers $6e^2$. Par définition, cela signifie que la série $\sum \frac{n^2 2^n}{n!}$ converge et a pour somme $6e^2$.

3. Le terme général est une fraction rationnelle. On applique la méthode frac. Soit $k \geq 2$, $F(k) = \frac{3k+2}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$. commentaire On détermine les

coefficients a, b, c à l'aide de la méthode polesimple

$$\begin{aligned} (X-1)F(X) &= \frac{3X+2}{X(X+1)} \xrightarrow{x=1} a = \frac{5}{2} \\ XF(X) &= \frac{3X+2}{X^2-1} \xrightarrow{x=0} b = -2 \\ (X+1)F(X) &= \frac{3X+2}{X(X-1)} \xrightarrow{x=-1} c = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$F(k) = \frac{5}{2} \frac{1}{k-1} - 2 \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \frac{1}{k+1}$$

On explicite alors la somme partielle d'indice n de la série proposée : commentaire comme $\frac{5}{2} - 2 - \frac{1}{2} = 0$ les termes qui apparaissent dans les trois sommes se simplifient. Seuls ne subsistent que les autres termes, c'est-à-dire ceux qui correspondent à des indices n'appartenant pas à $\llbracket 3, n-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \frac{3k+2}{k(k^2-1)} = \frac{5}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{5}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{5}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{11}{4} \end{aligned}$$

Par définition, la série $\sum \frac{3n+2}{n(n^2-1)}$ converge et a pour somme $\frac{11}{4}$.

4. commentaire le terme général ne ressemble même pas de loin au terme général d'une série classique, on cherche donc à faire apparaître un télescopage. Suivant l'indication fournie, commençons par simplifier l'expression du terme général. Soit $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\bullet 0 \leq \text{Arctan} \frac{1}{k} - \text{Arctan} \frac{1}{k+1} < \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet \tan \left(\text{Arctan} \frac{1}{k} - \text{Arctan} \frac{1}{k+1} \right) = \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{k(k+1)}} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1) + 1} = \frac{1}{k^2 + k + 1}$$

Ces deux propriétés signifient précisément que

$$\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{k^2 + k + 1} \right) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{k} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{k+1}.$$

Comme le terme général de la série à étudier est la différence de deux termes consécutifs d'une même suite, il y a télescopage. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{k^2 + k + 1} \right) &= \operatorname{Arctan}(1) + \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Arctan} \frac{1}{k} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{k+1} \right] \\ &= \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2\operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, par définition, la série de terme général $\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$ converge et a pour somme $\frac{\pi}{2}$.

5. Soit $k \geq 2$. On observe que $\ln \left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)} \right) = \ln \left(\frac{k+1}{k+3} \right) - \ln \left(\frac{k}{k+2} \right)$. Le terme général s'écrit comme différence de deux termes consécutifs d'une même suite, il y a donc télescopage. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)} \right) &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+1}{k+3} \right) - \ln \left(\frac{k}{k+2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{n+1}{n+3} \right) - \ln \left(\frac{1}{3} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(3). \end{aligned}$$

Ceci prouve la convergence de la série et $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right) = \ln(3)$.

6. On applique la méthode Pnxn :

$$\frac{k^2 + k - 1}{k!} = \frac{k(k-1) + 2k - 1}{k!} = \frac{k(k-1)}{k!} + 2 \frac{k}{k!} - \frac{1}{k!}$$

On en déduit pour $n \geq 2$ commentairedétailliez bien les étapes de ce calcul comme dans l'étude de la série 2.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{k^2 + k - 1}{k!} &= \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{k!} + 2 \sum_{k=0}^n \frac{k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = E_{n-2} + 2E_{n-1} - E_n \end{aligned}$$

où on a noté pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $E_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ la somme partielle d'indice n de la série exponentielle. Comme (E_n) converge vers e , il s'ensuit que $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k^2 + k - 1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2e$. La série $\sum \frac{n^2 + n - 1}{n!}$ converge et a pour somme $2e$.

7. On applique la méthode Pnxn. Soit $k \in \mathbf{N}$, $\frac{k^2 + 3k}{2^k} = \frac{k(k-1)}{2^k} + 4 \frac{k}{2^k}$. Par conséquent, la somme partielle d'indice n s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{k^2 + 3k}{2^k} &= \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{2^k} + 4 \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{1}{2^k} + 4 \sum_{k=1}^n k \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^2} \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{1}{2^{k-2}} + 4 \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

On reconnaît des sommes partielles de séries géométriques de raison $\frac{1}{2}$ dérivées d'ordre 1 et 2. commentaireComme $0 \leq \frac{1}{2} < 1$ les séries géométriques et dérivées de raison $\frac{1}{2}$ convergent ! Par opérations algébriques sur des suites possédant des limites, il s'ensuit que $\sum_{k=0}^n \frac{k^2 + 3k}{2^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \frac{2}{(1 - \frac{1}{2})^3} + 2 \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 12$. Autrement dit, la série converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 3n}{2^n} = 12$.

8. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k^2 + k + 1)e^{-k} &= \sum_{k=0}^n k(k-1)e^{-k} + 2 \sum_{k=0}^n ke^{-k} + \sum_{k=0}^n e^{-k} \\ &= e^{-2} \sum_{k=0}^n k(k-1)e^{-k+2} + 2e^{-1} \sum_{k=0}^n ke^{-k+1} + \sum_{k=0}^n e^{-k} \end{aligned}$$

Comme la raison e^{-1} de ces suites géométriques et dérivées appartient à $]0, 1[$, elles convergent et $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1)e^{-n} = \frac{2e}{(e-1)^3} + \frac{2e}{(e-1)^2} + \frac{e}{e-1}$. ▲

Exercice 2. — 1. Il s'agit d'une série à termes positifs (à partir du rang 3). commentaireDans cette première étude comme souvent, il s'agit d'une série à termes positifs. Pour déterminer sa nature, on cherche à la comparer avec une série de Riemann, convergente ou divergente au moyen de la méthode nalphaun. On l'applique ici avec $\alpha = 2$. Pour déterminer sa nature nous comparons le terme

général u_n à une série de référence, à savoir une série de Riemann. Par croissances comparées

$$n^2 u_n = \frac{n^4 \ln(n)}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en conclut que $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

2. Commençons par obtenir un équivalent du terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n) n^2} \sim \frac{1}{\ln^3(n) n^{\frac{3}{2}}}.$$

Il s'agit d'une série à termes positifs (à partir d'un certain rang), appliquons la méthode nalphaun avec $\alpha = \frac{3}{2}$. Il vient

$$n^{\frac{3}{2}} u_n \sim \frac{1}{\ln^3(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

3. Commençons par obtenir un équivalent du terme général

$$u_n = \frac{\text{Arctan}(n)}{n^2} \sim \frac{\pi}{2n^2}.$$

Il s'agit d'une série à termes positifs : la méthode nalphaun avec $\alpha = 2$ donne

$$n^2 u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

4. Commençons par obtenir un équivalent du terme général. On utilise pour cela un développement limité de $\ln(1+h)$ au voisinage de 0. commentaire On voit ici facilement grâce à son équivalent que u_n est de signe positif (lorsque n est assez grand) ce qui *a priori* n'était pas évident !

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

Pour conclure, on applique la méthode nalphaun avec $\alpha = 2$

$$n^2 u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

Ainsi $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

5. Commençons par obtenir un équivalent du terme général. On utilise les développements limités de $\ln(1+h)$ et de $\cos(u)$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim -\frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une série à termes négatifs : la méthode nalphaun avec $\alpha = 2$ donne pliquent aussi ! Ainsi $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann

commentairelorsque la série est à termes négatifs les règles de comparaison s'ap-convergente.

6. Commençons par obtenir un équivalent du terme général.

$$u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n} \left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$$

$$\text{Or } \sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \text{ donc } \sqrt[n]{n} \sim 1$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} - 1 &= \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - 1 = \exp\left(\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - 1 \\ &= \exp\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Finalement $u_n \sim \frac{1}{n^2}$. D'après la **règle des équivalents** $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

7. u_n n'est pas de signe constant ! On applique la méthode Srn. On a alors

$$|u_n| = \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

8. On détermine un équivalent de u_n

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \tan\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $u_n = -\frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Autrement dit, $u_n \sim -\frac{1}{2n^3}$ et par conséquent $n^3|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2}$. La règle $n^\alpha u_n$ (methode nalphaun) appliquée avec $\alpha = 3$ à la série à termes négatifs $\sum u_n$ montre qu'elle est convergente.

9. Déterminons un équivalent de u_n :

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} = \exp\left[n \ln\left(1 - \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{h_n}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Comme $h_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, on a $h_n^2 = \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et par conséquent

$$\ln(1 + h_n) = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où l'on tire finalement

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \left[\exp\left(1 - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(-\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{12\sqrt{e}n} \end{aligned}$$

Ainsi $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{12\sqrt{e}}$, donc $\sum u_n$ diverge par comparaison à une série de Riemann divergente.

10. On applique directement la methode nalphaun

$$n^2 u_n = \frac{e^{2 \ln(n)}}{(\ln(n))^{\ln(n)}} = \left(\frac{e^2}{\ln(n)}\right)^{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

11. u_n n'est pas de signe constant! On applique la methode Srn. On a alors commentaire Attention ici à bien conclure d'abord à la convergence de la série des valeurs absolue puis à la convergence de la série. En effet, la règle des équivalents ne s'applique pas lorsque les séries ne sont pas de signe constant.

$$|u_n| = \left|\frac{(1+n)\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}\right| \sim \frac{|\sin(n)|}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

12. Comme précédemment, on applique la methode Srn. Comme $|u_n| = \frac{\ln(n)}{e^n}$, on applique la methode nalphaun. Par croissances comparées,

$$n^2 |u_n| = \frac{n^2 \ln(n)}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente. ▲

Exercice 3. — [1] commentaire On utilise la methode stirling $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim$

$$\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^2} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}, \text{ donc : } u_n \sim \frac{1}{(2n-1)\sqrt{\pi n}} \sim \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}.$$

[2] Comme $n^{\frac{3}{2}} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, $\sum u_n$ converge par comparaison avec une série de Riemann. ▲

Exercice 8. — Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

1. On suppose que $\ell < 1$. Soit $k \in]\ell, 1[$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < k$, il s'ensuit par compatibilité limite et inégalité qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < k$$

Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, on a donc $0 \leq u_{n+1} \leq k u_n$. commentaire la positivité de la suite est essentielle ici! On en déduit alors par récurrence immédiate que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq k^{n-n_0} u_{n_0}$$

On peut alors conclure à la convergence de la série $\sum u_n$ par comparaison à la série géométrique de raison $k \in]0, 1[$.

2. On suppose ici que $\ell > 1$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, commentaire compatibilité limite et inégalité il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

Comme (u_n) est strictement positive, ceci entraîne qu'elle est croissante, à partir du rang n_0 . En particulier, la suite (u_n) ne saurait être convergente de limite nulle, la série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente!

3. Lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$ l'argument ci-dessus est valide et la série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente. Par contre, on ne peut rien dire lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, comme le montrent les deux exemples suivants.

- Si $u_n = \frac{1}{n}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, et la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
- Si $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$, et la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. ▲

Exercice 11 .—

Exercice 12 .— On met en œuvre la méthode de Taylor. Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Soit $n \in \mathbf{N}$, notons $S_n(x)$ le polynôme de Taylor d'ordre n en 0 de la fonction \exp : Comme pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$, il en résulte que

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!},$$

Appliquons l'**inégalité de Taylor-Lagrange** entre 0 et x . Par croissance de la fonction exponentielle, tout réel t compris entre 0 et x

$$|\exp(x) - S_n(x)| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par croissances comparées}$$

Ce qui prouve que la suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente de limite $\exp(x)$. Ceci étant vrai pour tout réel x , on obtient l'absolue convergence en appliquant cette propriété à $|x|$. ▲

OCCUPER SON PROF DE MATHS
TOUTE LA JOURNÉE ? SIMPLE !

