PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA · LÉON L'AFRICAIN
Prépas MP

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مَمُّونِي مُولَاي اسْمَاعِيل

Suites et Séries de Fonctions

Partie I : Les Suites de Fonctions

Exo 1 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que
$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$
Quelle est la limite de φ_n en 1? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1, 1[$.
3. Soit $a \in]0, 1[$. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

Exo 2 On pose, pour $n \geq 1$ et $x \in]0, 1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on précisera. On note ensuite $g = f - f_n$.
2. Étudier les variations de g.
3. En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
4. Soit $a \in [0, 1[$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, a]$.

Exo 3 Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
2. $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exo 4 Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^a x^n(1-x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

Exo 5 On pose $f_n : x \mapsto ne^{-n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exo 6 Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Démontrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f *qui n'est pas* de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Exo 7 Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0, 1]$?
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ pour $a \in]0, 1]$.

Exo 8 Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
2. $f_n(x) = (\sin x)^n \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = e^{\frac{(n-1)x}{n}}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Exo 9 Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ pour } x \in [0, n], \text{ et } 0 \text{ ailleurs.}$$

Exo 10 On définit une suite de fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par $f_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I = [0, 1]$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (f_n(x))^2\right).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$
3. En déduire que la convergence est uniforme sur I.

Exo 11 Soit (f_n) une suite de fonctions bornées, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f. Montrer que f est bornée. Le résultat persiste-t-il si on suppose uniquement la convergence simple?

Exo 12 Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0, 1]$ telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Exo 13 Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un même intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) et (g_n) convergent uniformément sur I vers respectivement f et g. On suppose de plus que f et g sont bornées. Démontrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

Exo 14 Démontrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues est elle-même uniformément continue.

Exo 15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
2. Que dire du polynôme $P_n - P_N$?
3. En déduire que f est nécessairement un polynôme.

Exo 16 **1.** Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha < \beta$, $M \geq 0$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions M-lipschitziennes de $[\alpha, \beta]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $[\alpha, \beta]$, la convergence est en fait uniforme.
2. Soient $]a, b[$ un intervalle ouvert, et (f_n) une suite de fonctions convexes de I dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans $]a, b[$.

FiN