Feuille d'exercices:
Séries Entieres

Partie II : Les Types Concours

Rayon de convergence

Exercice 1

1. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence π.
2. Est-il possible de trouver des suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n = o(b_n)$ et pourtant $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence?
3. Quel est le lien entre le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n z^n$?

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ **2.** $\sum_n \frac{n!}{(2n)!} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$

4. $\sum_n (\ln n) x^n$ **5.** $\sum_n \frac{\sqrt{n} x^{2n}}{2^n+1}$ **6.** $\sum_n (2+ni) z^n$

7. $\sum_n \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)} z^n$

Exercice 3

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n\cdot 2^n}$ **2.** $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 1} \left(\exp(1/n)-1\right) x^n$

4. $\sum_n a^{\sqrt{n}} z^n,\ a>0$ **5.** $\sum_n z^{n!}$ **6.** $\sum_{n\geq 1} n^{\ln n} z^n$

Exercice 4

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ dans les cas suivants :

1. la suite (a_n) tend vers $\ell \neq 0$;
2. la suite (a_n) est périodique, et non identiquement nulle;
3. a_n est le nombre de diviseurs de n;
4. a_n est la $n-$ième décimale de $\sqrt{2}$.

Exercice 5 - Rayon de convergence et suite récurrente linéaire

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ où (a_n) est la suite déterminée par $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ et $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 - Division par n!

1. Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.
2. On suppose maintenant que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $\rho > 0$. Que dire du rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$?

Exercice 7 - Puissance

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho \in [0, +\infty]$, telle que $a_n > 0$ pour tout entier n et soit $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n^\alpha x^n$?

Exercice 8 - Transformation

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$$

et on note R' le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} b_n x^n$.

1. Démontrer que $R' \geq \max(1, R)$.
2. Démontrer que $R' = \max(1, R)$.

Exercice 9 - Produit de Hadamard

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif ρ_1 et ρ_2. Montrer que le rayon de convergence R de la série $\sum_n a_n b_n z^n$ vérifie $R \geq \rho_1 \rho_2$. A-t-on toujours égalité?

Exercice 10 - Comparaison de rayon de convergence

Soit R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries entières de terme général :

1. $a_n e^{\sqrt{n}} z^n$ **2.** $a_n z^{2n}$ **3.** $a_n z^{n^2}$.

Exercice 11 - Somme partielle

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ. Soit $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ et soit R le rayon de convergence de la série $\sum_n S_n z^n$.

1. Montrer que $R \leq \rho$.
2. Montrer que $\inf(1, \rho) \leq R$.

Propriétés de la somme

Exercice 12 - Fonction paire

Soit S la somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que S est paire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.

Exercice 13 - Série entière qui s'annule autour de zéro

Soit S une série entière de rayon de convergence non nul. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, $S(x) = 0$. Justifier que S est identiquement nulle.

Exercice 14 - L'anneau des séries entières est intègre

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des séries entières (à coefficients complexes) de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. L'addition et le produit de Cauchy de deux séries entières munissent $\mathcal{A}$ d'une structure d'anneau. Montrer que $\mathcal{A}$ est intègre.

Exercice 15 - Étude pratique de la somme d'une série entière

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Etudier la convergence en $-R$ et en R.
3.
   3.1. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, alors
   $$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M.$$
   3.2. En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
4.
   4.1. On considère la série entière
   $$g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] x^n.$$
   Démontrer que cette série converge normalement sur $[0, 1]$.
   4.2. En déduire que $\lim_{x\to 1^-} (1-x)f(x) = 0$.

Exercice 16 - Comportement au bord d'une série entière

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs. On note R et R' les rayons de convergence respectifs des series entières $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$. Soient $f : x \mapsto \sum_n a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_n b_n x^n$. On suppose enfin qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

1. Montrer que $R \geq R'$.

On suppose désormais que $R' = 1$ et que la série $\sum_n b_n$ est divergente.

2. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 0$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, alors $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \geq M$.
3. En déduire que $g(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1$.
4. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $(l-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq N$. Montrer que
$$f(x) = P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$
où P est un polynôme, et $(l-\varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq 0$.
5. En déduire que
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exercice 17 - Limite en l'infini d'une série entière et développement en série

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. Soit f la somme de la série entière $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{4n-1}}{n!(4n-1)}$. Montrer que f admet une limite en $+\infty$.

Exercice 18 - Théorèmes de Tauber -1

Soit $S(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite.

1. La série $\sum_n a_n$ est-elle nécessairement convergente?

2. On suppose désormais que $a_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que $\ell=\sum_{n\geq 0}a_n$.

Exercice 19 - Formule de Cauchy et applications

Soit $f(z)=\sum_n a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et soit $r\in]0,R[$.

1. Montrer que, pour tout entier k, la série de fonctions $\theta\mapsto\sum_n a_nr^ne^{i(n-k)\theta}$ converge normalement sur $[0,2\pi]$.

2. En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a

$$2\pi r^ka_k=\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta.$$

3. Application : on suppose que $R=+\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Exercice 20 - Théorème d'Abel

Soit (a_n) une suite de réels tel que $\sum_n a_nx^n$ soit de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série entière. On suppose de plus que la série numérique $\sum_n a_n$ converge et on note

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k.$$

1. Démontrer que, pour tout $x\in[0,1[$ et tout $n\geq 1$, on a

$$f(x)-\sum_{k=0}^{+\infty}a_k=\sum_{k=0}^{n}a_k(x^k-1)+(x-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty}R_kx^k+R_n(x^{n+1}-1).$$

2. En déduire que

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k.$$

Exercice 21 Théorème de Tauber - 2

Soit $S(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite. On suppose enfin que $a_n=o(1/n)$.
Pour $N\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1[$, on note

$$A(x)=S(x)-\ell,\ B_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(1-x^n)a_n,\ C_N(x)=\sum_{n=N+1}^{+\infty}a_nx^n.$$

1. Vérifier que $\sum_{n=0}^{N}a_n-\ell=A(x)+B_N(x)-C_N(x)$.

2. Soit $\varepsilon>0$. Démontrer qu'il existe un entier N_0 tel que, pour tout $N\geq N_0$,

$$|C_N(x)|\leq\frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

3. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ.

Développements en série entière

Exercice 22 - DSE en 0

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$ **2.** $\dfrac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$

3. $\ln(a+x)$ avec $a>0$ **4.** $\dfrac{e^x}{1-x}$

5. $\ln(1+x-2x^2)$ **6.** $(4+x^2)^{-3/2}$

Exercice 23 - Développement en série entière d'une racine carrée

Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 24 - DSE d'une fraction rationnelle

Développer en série entière la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$ et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Exercice 25 - Rayon de convergence et somme - 1

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1}x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n$

4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}x^{2n}$

Exercice 26 Rayon de convergence et somme

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$

4. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

Exercice 27

Pour $n\geq 1$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geq 1} S_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. Démontrer que $R=1$.
2. On pose, pour $x\in]-1,1[$, $F(x)=\sum_{n\geq 1} S_n x^n$. Démontrer que pour tout $x\in]-1,1[$, on a $(1-x)F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$.
3. En déduire la valeur de $F(x)$ sur $]-1,1[$.

Exercice 28 - Méthode de l'équation différentielle

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t)=\cos(\alpha \arcsin t)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

Exercice 29 - Méthode de l'équation différentielle

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\exp(\lambda\arcsin x)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0)=1$ et $y'(0)=\lambda$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Exercice 30 - Par équation différentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$.

1. Étudier la parité de f.
2. Justifier que f est développable en série entière.
3. En formant une équation différentielle vérifiée par f, déterminer ce développement.

Exercice 31 - Fonction définie par une intégrale

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer l'intégrale de Wallis $I_{2n}=\int_0^\pi \sin^{2n}x dx$ à l'aide de la formule $2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix}$.
2. Justifier que, tout $u\in]-1,1[$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}u^n.$$

3. Pour tout $x\in]-1,1[$, on pose

$$f(x)=\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}.$$

Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et donner son développement.

Exercice 32 - Intégration ou équation différentielle

1. Pour $k\in\mathbb{N}$, démontrer que $\int_0^{+\infty} t^{2k+1}e^{-t^2}dt=\frac{k!}{2}$.
2. Déterminer le développement en série entière en 0 de

$$f:x\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(tx)dt$$

   2.1. en procédant à une intégration terme à terme;
   2.2. en déterminant une équation différentielle dont le fonction est solution.

Exercice 33 - Une fonction C^∞ non développable en série entière

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}e^{n^2ix}$.

1. Justifier que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour chaque $k\geq 1$, $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}\geq k^ke^{-k}$.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 34 - Fonction définie par une série

Pour $x>-1$, on pose $u(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$. Démontrer que u est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 35 - Une condition suffisante pour l'existence d'un développement en série entière

Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe $C, A > 0$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f^{(n)}\|_\infty \leq C \cdot A^n \cdot n!$$

(on a noté $\|g\|_\infty = \sup_{x\in[-a,a]} |g(x)|$). Démontrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 36 - Théorème de Bernstein

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0 telle que f, et toutes ses dérivées, sont positives sur I. Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset I$. On veut prouver dans cet exercice que f est somme de sa série de Taylor sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$.

1. Justifier que, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)du.$$

On pose alors, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)du.$

2. Démontrer que, si $|x| < \alpha$, alors $|R_n(x)| \leq |x/\alpha|^{n+1} R_n(\alpha)$.
3. Conclure.

Exercice 37 - Inverse d'une fonction développable en série entière

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence strictement positif. On suppose de plus que $a_0 \neq 0$. Le but est de prouver que la fonction $1/f$ est développable en série entière au voisinage de zéro.

1. On suppose que $1/f = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, avec rayon de convergence strictement positif. Quelle relation de récurrence vérifie la suite (b_n)?
2. Soit (b_n) la suite définie par la relation de récurrence précédente.
   - **2.1.** Justifier qu'il existe une constante $R > 0$ telle que $|a_n| \leq R^n$ pour tout $n \geq 1$.
   - **2.2.** Justifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{k\geq 1} \frac{R^k}{C^k} \leq |a_0|.$$

   - **2.3.** Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $|b_n| \leq \dfrac{C^n}{|a_0|}$.
   - **2.4.** Que peut-on en déduire sur la série $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$.
3. En déduire que $1/f$ est développable en série entière.

Utilisation de développements en séries entières

Exercice 38 - Régularité

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ :

1. $f(x) = \sin(x)/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.
2. $g(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$ si $x \geq 0$ et $g(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$.
3. $h(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ si $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $h(0) = 0$.

Exercice 39 - Comparaison de deux fonctions

Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(x) \leq e^{x^2/2}$.

Exercice 40 - Calcul de la somme d'une série

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition?
2. Sur quel intervalle la fonction f est-elle a priori continue? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R, R]$.
3. Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R, R[$. En déduire une expression de f sur $]-R, R[$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Exercice 41 - Calcul de la somme d'une série

On se propose dans cet exercice de calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n)!}$. Pour cela, on introduit

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1. Méthode 1. On note $j = e^{2i\pi/3}$.
   - **1.1.** Calculer $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. En déduire le développement en série entière de $e^x + e^{jx} + e^{j^2 x}$.
   - **1.2.** En déduire $S(x)$, puis la valeur de la somme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n)!}$.
2. Méthode 2.
   - **2.1.** Former une équation différentielle du troisième ordre vérifiée par S.
   - **2.2.** La résoudre.
   - **2.3.** Retrouver la valeur de la somme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 42 Une égalité intégrale/séries

1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n \ln(x) dx$.
2. Démontrer que $\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

Exercice 43 - Une suite récurrente

Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $\quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

1. On suppose que la série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif $r > 0$. Démontrer que, pout tout $x \in]-r, r[$, on a

$$x f^2(x) - f(x) + 1 = 0.$$

2. En déduire qu'il existe $\rho > 0$ tel que $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ pour tout $x \in]-\rho, \rho[$, $x \neq 0$.
3. En développant en série entière la fonction précédente, calculer u_n en fonction de n.

Exercice 44 - Nombre de dérangements

Pour tous les entiers k et n tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de bijections (ou permutations) s de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ ayant k points fixes, c'est-à-dire telles que

$$k = \operatorname{card}\big\{i \in \{1, \ldots, n\};\ s(i) = i\big\}.$$

On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$. d_n désigne le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $(\exp x) f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
7. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 45 - Nombre d'involutions

On rappelle qu'une involution de $\{1, \ldots, n\}$ est une application $s : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ telle que $s \circ s(k) = k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. On note I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$ et on convient que $I_0 = 1$.

1. Démontrer que, si $n \geq 1$, alors

$$I_{n+1} = I_n + n I_{n-1}.$$

2. Démontrer que la série entière $S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge pour tout x dans $]-1, 1[$. On note S sa somme.
3. Justifier que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $S'(x) = (1 + x) S(x)$.
4. En déduire une expression de $S(x)$, puis de I_n.

Applications des séries entières à la résolution d'équations différentielles

Exercice 46 - Une équation différentielle détaillée

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

1. Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n)?
2. Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue?
3. Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 47 - Avec des séries entières

On considère l'équation différentielle

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 0 \qquad (E)$$

dont on se propose de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

1. Question préliminaire : soient a, b, c, d 4 réels et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x^2) + b\sin(x^2) & \text{si } x > 0 \\ c\cos(x^2) + d\sin(x^2) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

A quelle condition sur a, b, c, d la fonction f se prolonge-t-elle en une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$?
On recherche les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de 0. On note $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une telle solution, lorsqu'elle existe, et on désigne par R son rayon de convergence.
2. Montrer qu'il existe une relation de récurrence, que l'on explicitera, entre a_{n+4} et a_n.
3. Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer a_{4p+1} et a_{4p+3}.
4. Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer a_{4p} en fonction de a_0 et de p (respectivement a_{4p+2} en fonction de a_2 et p).
5. Quel est le rayon de la série entière obtenue? Exprimer la comme combinaison linéaire de deux fonctions "classiques".
6. Soit S le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Préciser une base de S.