PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA · LÉON L'AFRICAIN
Prépas MP

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مَمُوني مُولَاي اسْمَاعِيل

Séries numériques

Partie II : Les Classiques

Exo 1

Transformation d'Abel

Soit (a_n) et (b_n) deux suites numériques tq (b_n) décroissante vers 0 et il existe M>0 tel que

$$|S_n| = |\Sigma_{k=0}^{n} a_k| \leq M \text{ pour tout entier } n$$

1. Montrer que $\Sigma_{k=0}^{n} a_k b_k = \Sigma_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}) S_k + a_0 b_0 + b_n S_n$
   Indication clé : $a_k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \geq 1$
2. Montrer que la série $\Sigma_k (b_k - b_{k-1}) S_k$ converge absolument
3. En déduire que $\Sigma_{k\geq 0} a_k b_k$ converge
4. **Application 1 : Critère Spécial de Séries Alternées (Critère de Leibniz)**
   Soit (ε_n) une suites numériques telle que q (ε_n) décroissante vers 0.
   Montrer que $\Sigma(-1)^k \varepsilon_k$ converge
5. **Application 1 : Série de Dirichlet**
   5.1. Montrer que la série $\Sigma_k e^{ik\theta} / k$ converge pour tout $\theta \notin 2\pi Z$
   5.2. Vérifier que la série $\Sigma_k e^{ik\theta} / k$ semi-converge où $\theta \notin 2\pi Z$
   5.3. En déduire que $\Sigma_k \cos(k\theta)/k$ et $\Sigma_k \sin(k\theta)/k$ sont semi-convergentes.

Exo 2

Règle de Raabe-Duhamel

Soit (u_n) suite numérique telle que $u_{n+1} / u_n = 1 - \alpha / n + O(1/n^\beta)$ tel que $\beta>1$.

1. On suppose $\alpha>1$. On pose $v_n = n^\alpha u_n$
   1. Donner un DL de $\ln(v_{n+1} / v_n)$
   2. En déduire que la série $\Sigma_n \ln(v_{n+1} / v_n)$ converge.
   3. En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite L finie non nulle.
   4. En déduire que la série $\Sigma_n u_n$ un converge.
2. On suppose $\alpha<1$. Montrer que la série $\Sigma_n u_n$ diverge.
3. $\alpha=1$
   1. Donner un exemple où $\alpha=1$ et $\Sigma n\, u_n$ converge
   2. Donner un exemple où $\alpha=1$ et $\Sigma n\, u_n$ diverge
   3. Conclure
4. Donner une conclusion générale

Exo 3

La Constante γ d'Euler

1. Montrer que $\ln(n) - \ln(n-1) < 1/n$.
2. En déduire que $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ diverge.
3. Rappeler l'inégalité de comparaison séries intégrales.
4. En déduire que $H_n \sim \ln n$
5. Montrer que $(H_n - \ln n)$ est une suite décroissante minorée
6. En déduire que $(H_n - \ln n)$ converge
   On pose $\lim (H_n - \ln n) = \gamma$ (appelée constante gamma d'Euler)
7. En déduire $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$
8. Montrer que $H_n - \ln n - \gamma = \sum_{k=n+1}^{\infty} [\ln(k/k-1) - 1/k]$
9. En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + 1/2n + o(1/n)$

Exo 4

Le Produit de Cauchy

Soit (a_n) et (b_n) deux suites à valeurs dans IR ou C.

1. Rappeler la formule de leur produit de Cauchy.
2. Énoncer le théorème fondamental en relation avec le produit de Cauchy.

Exo 5

L'Exponentielle Complexe.

Soit E une algèbre normée de Banach.

1. Soit $z \in C$
   - 1.1. Montrer que la série $\sum_{k\geq 0} z^k/k!$ converge absolument.
   - 1.2. En déduire que la série $\sum_{k\geq 0} z^k/k!$ converge.

   On pose $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$
2. Justifier que $\exp(0_E) = 1_E$.
3. Soit $z_1, z_2 \in C$. Montrer que $\exp(z_1).\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$
4. En déduire que l'équation $\exp(z)=0$ n'admet aucune solution.
5. Soit $\theta \in IR$.
   - 5.1. Montrer que la série $\sum_{k\geq 0} (-1)^k \theta^{2k}/(2k)!$ converge.
   - 5.2. Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \theta^{2k}/(2k)! = \cos(\theta)$.
   - 5.3. Montrer que la série $\sum_{k\geq 0} (-1)^k \theta^{2k+1}/(2k+1)!$ converge.
   - 5.4. Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \theta^{2k+1}/(2k+1)! = \sin(\theta)$.
6. Soit $\theta \in IR$. Montrer que $\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.
7. Résoudre dans C, l'équation $\exp(z)=-1$.
8. Résoudre dans C, l'équation $\exp(z)=i$.
9. Soit $z \in C$ (fixé). Pour tout $t \in IR$, on pose $f(t)=\exp(t.z)$.
   - 9.1. Montrer que $\lim [f(h)-f(0)] / h = z$ quand $h \to 0$.
   - 9.2. En déduire que $[f(t+h)-f(t)] / h = z.\exp(t.z)$ quand $h \to 0$.
   - 9.3. Que peut-on en conclure.

Exo 6 Les Cosinus et Sinus Complexes.

1. Soit z ϵC.
   - 1.1. Montrer que la série $\sum_{k\geq 0} (-1)^k z^{2k}/2k\,!$ converge absolument.
   - 1.2. En déduire que la série $_{k\geq 0} (-1)^k z^{2k}/2k\,!$ converge.

   On pose $\cos(z)=\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}/2k\,!$
   - 1.3. Justifier que cos(-z)=cos(z).
2. Soit z ϵC.
   - 2.1. Montrer que la série $\sum_{k\geq 0} (-1)^k z^{2k+1}/(2k+1)\,!$ converge absolument.
   - 2.2. En déduire que la série $\sum_{k\geq 0} (-1)^k z^{2k+1}/(2k+1)\,!$ converge.

   On pose $\sin(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{k\geq 0} (-1)^k z^{2k+1}/(2k+1)\,!$
   - 2.3. Justifier que sin(-z)=-sin(z).
3. Soit z ϵC. Montrer que exp(iz)=cos(z)+i sin(z).
4. Résoudre dans C l'équation cos(z)=2.
5. Résoudre dans C l'équation sin(z)=-i.
6. Soit a,b ϵC
   - 6.1. Montrer que $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$.
   - 6.2. Montrer que cos(a+b)=cos(a)cos(b)-sin(a)sin(b).
   - 6.3. Montrer que sin(a+b)=cos(a)sin(b)+sin(a)cos(b).

Exo 7 Les fonctions Dzêta et Êta de Riemann.

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Montrer que ξ(x) converge si et seulement si x>1.
2.

3) Étude aux bornes.

a) **i)** Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.

ii) En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

3. En déduire que lim ξ(x) =1 quand x→ +∞ et que lim ξ(x) =+∞ quand x→ 1^+
4. Justifier que ξ(x) ~ 1 / (x-1) quand x→ 1^+
5. La fonction êta de Riemann est définie par la formule

$$\forall x \in]0;\ +\infty[, \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

   - 5.1. Montrer que cette série converge pour tout x>0.

   Montrer que :

$$\forall x \in]1,\ +\infty[, \qquad \zeta(x) - F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$$

   - 5.2.

   Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{2^x} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}$$