

Suites et Séries aductions

Partie I : Les Séries de Fonctions

- Exo 1** Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.
1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
 2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
 3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$.
 4. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .

- Exo 2** Pour $x \in I = [0, 1]$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = n^a x^n (1-x)$.
1. Étudier la convergence simple sur I de la série de terme général u_n . On notera dans la suite S la somme de la série.
 2. Étudier la convergence normale sur I de la série de terme général u_n .
 3. On suppose dans cette question que $a = 0$. Calculer S sur $[0, 1[$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
 4. On suppose $a > 0$. Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur I .

- Exo 3** Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.
1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
 2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur \mathbb{R}_+ .
 3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
 4. La convergence est-elle uniforme sur \mathbb{R}_+ ?

- Exo 4** Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.
1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
 2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .
 3. La convergence est-elle normale sur \mathbb{R}_+ ?

- Exo 5** On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.
1. Démontrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
 2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur \mathbb{R}_+ .
 3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .

Exo
6

On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I .
3. Prouver que S est dérivable sur I , calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I .
4. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

Exo
7

Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Établir que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer S' .

Exo
8

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{n^2}$.

1. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ est convergente. On note $S(t)$ sa somme.
2. Démontrer que S est une fonction continue sur \mathbb{R} et impaire.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$ (on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).
4. Quel est le sens de variation de S ?
5. Soit $N \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in]-t_0, t_0[\setminus \{0\}$, on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{u_n(t)}{t} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

6. En déduire que la courbe représentative de S admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
7. Tracer la courbe représentative de S .

Exo
9

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s)$.
4. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 0$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.

5. Démontrer que ζ est convexe.
6. Tracer la courbe représentative de ζ .

Exo
10

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$. On note $S(x)$ sa somme.
2. Démontrer que S est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .
3. Étudier la monotonie de S sur \mathbb{R}_+^* .
4. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
5. Justifier que S admet une limite en 0. Démontrer que, pour tout entier N , on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} S(x)$.

Exo
11

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ et on note f sa somme.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Démontrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
3. On fixe $A > 0$.

3.1. Justifier l'existence d'un entier $N \geq 1$ tel que

$$\sum_{n=1}^N \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$

3.2. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \delta[$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{e^{-nh} - 1}{h(1+n^2)} \leq -A + 1.$$

- 3.3. Démontrer que f n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exo
12

Soit la série de fonctions $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Démontrer que S définit une fonction continue sur \mathbb{R} .
2. Soit $x > 0$ et $n \geq 1$. Justifier que

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2+t^2} dt \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{x}{x^2+t^2} dt.$$

3. En déduire que S admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Exo
13

Sur $I =]-1, +\infty[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

1. Montrer que S est définie et continue sur I .
2. Étudier la monotonie de S .
3. Calculer $S(x+1) - S(x)$.
4. Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+ .
5. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
6. En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

Exo
14

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1, 1]$ par $f_n(t) = \frac{1}{n} t^n \sin nt$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$.
2. Soit $a \in]0, 1[$.
 - 2.1. Montrer que la série $\sum f'_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
 - 2.2. En déduire que la fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$ et montrer que, pour $x \in] -1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{1 - 2x \cos x + x^2}.$$

- 2.3. Montrer que $f(t) = \arctan \frac{t \sin t}{1 - t \cos t}$ pour $t \in] -1, 1[$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1, 1]$, $A_n(t) = \sum_{k=1}^n t^k \sin kt$.
 - 3.1. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1, 1]$ on ait $|A_n(t)| \leq M$.
 - 3.2. Montrer en écrivant $t^k \sin(kt) = A_k(t) - A_{k-1}(t)$ que

$$\sum_{k=1}^n \frac{t^k \sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}.$$

- 3.3. En déduire que la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[-1, 1]$ et que $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$ sur $[-1, 1]$. Montrer que f est continue sur cet intervalle.
- 3.4. En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$.

Exo
15

On considère la fonction $\mu(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Quel est le domaine de définition de μ ?
2. Montrer que μ est de classe \mathcal{C}^∞ sur son domaine de définition.
3. Démontrer que μ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.
4. On souhaite démontrer que μ admet une limite en 0.

4.1. Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$-1 + 2\mu(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right).$$

4.2. En déduire que pour tout $x > 0$, on a

$$0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x}.$$

4.3. Conclure.

Exo
16

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que, pour tout $k \geq 0$, on a $\int_a^b f(t)t^k dt = 0$.

1. Rappeler le théorème de Stone Weirstrass
2. Démontrer que $\int_a^b f^2(t) dt = 0$.
3. En déduire que f est la fonction nulle.