

Feuille d'Exercices : Réduction

Partie 3 : Matrices Par Blocs (Corrigé)

Exercice 1

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & O_{n,p} \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K}).$$

Établir

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(A) + \text{rg}(B).$$

Solution

Posons $r = \text{rg}(A)$ et $s = \text{rg}(B)$. Les matrices A et B sont respectivement équivalentes aux matrices

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,t} & O_{n-r} \end{pmatrix} \text{ et } J_s = \begin{pmatrix} I_s & O_{s,p-s} \\ O_{p-s,t} & O_{p-s} \end{pmatrix}.$$

Il existe donc $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $R, S \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$PAQ = J_r \text{ et } RBS = J_s.$$

En opérant par blocs, on a alors

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & O \\ O & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_r & O \\ O & J_s \end{pmatrix}$$

avec les facteurs

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & R \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} Q & O \\ O & S \end{pmatrix}$$

inversibles.

On en déduit

$$\text{rg}(M) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} J_r & O \\ O & J_s \end{pmatrix}\right) = r + s.$$

Soient $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Montrer

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & B \\ \mathbf{O}_{p,n} & C \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg}(C).$$

Solution

En multipliant par la matrice inversible

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & -B \\ \mathbf{O}_{p,n} & \mathbf{I}_p \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & B \\ \mathbf{O}_{p,n} & C \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{O}_{n,p} \\ \mathbf{O}_{p,n} & C \end{pmatrix}.$$

En posant $r = \operatorname{rg}(C)$, on peut écrire $PCQ = J_r$ avec

$$P, Q \in \operatorname{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ et } J_r = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O}_{r,p-r} \\ \mathbf{O}_{p-r,r} & \mathbf{O}_{p-r} \end{pmatrix}.$$

En multipliant à gauche et à droite par les matrices inversibles

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{O}_{n,p} \\ \mathbf{O}_{p,n} & P \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{O}_{n,p} \\ \mathbf{O}_{p,n} & Q \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & B \\ \mathbf{O}_{p,n} & C \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{O}_{n,p} \\ \mathbf{O}_{p,n} & J_r \end{pmatrix} = n + r.$$

Exercice 3

Soient $A \in \operatorname{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{O}_{q,p} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}).$$

Déterminer le rang de M en fonction de celui de C .

Solution

Introduisons la matrice inversible

$$M' = \begin{pmatrix} A^{-1} & O_{p,q} \\ O_{q,p} & I_q \end{pmatrix}.$$

On a $\text{rg}(M) = \text{rg}(MM')$ avec

$$MM' = \begin{pmatrix} I_p & B \\ O_{q,p} & C \end{pmatrix}.$$

Par opérations élémentaires sur les colonnes, la matrice MM' a le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} I_p & O_{p,q} \\ O_{q,p} & C \end{pmatrix}.$$

Enfin, les opérations élémentaires déterminant le rang de C se transposent à la matrice en cours afin d'en donner le rang. Au final

$$\text{rg}(M) = p + \text{rg}(C).$$

Exercice 4

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K}).$$

On suppose B inversible. Établir

$$\text{rg}(M) = p \Leftrightarrow A = O_n.$$

Solution

L'implication (\Leftarrow) est immédiate car $\text{rg}(B) = p$.

Inversement, supposons $\text{rg}(M) = p$.

Puisque B est inversible, les p dernières lignes de M sont indépendantes et donc les autres lignes de M sont combinaisons linéaires de celles-ci puisque $\text{rg}(M) = p$. Puisque les n premières lignes de M sont combinaisons linéaires des p dernières lignes de M , on a

$$A = O_n.$$

Exercice 5 4952 ★★ MINES (PC)

Correction ▼

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Exprimer le rang de la matrice M décrite par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}.$$

(b) Calculer l'inverse de M lorsque cela est possible.

Solution

(a) **Méthode:** Par opérations élémentaires sur les rangées, on peut opérer sur les blocs tout en conservant le rang de la matrice étudiée.

En retranchant¹ la première ligne de blocs à la deuxième ligne de blocs, on obtient

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & A \\ O_n & B - A \end{pmatrix}.$$

En opérant sur les colonnes de blocs, on poursuit

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & B - A \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'égalité

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B - A).$$

En effet, les opérations élémentaires qui transforment A et $B - A$ en matrices échelonnées peuvent être adaptées à la matrice en cours. Le nombre total de pivots obtenus est la somme du nombre de pivots pour A et $B - A$.

(b) La matrice M est inversible si, et seulement si, A et $B - A$ le sont. Supposons que ce soit le cas.

Méthode: On résout l'équation $MX = Y$ en écrivant les colonnes X et Y par blocs.

Posons

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \text{ avec } X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

et étudions l'équation $MX = Y$ ce qui correspond au système

$$\begin{cases} AX_1 + AX_2 = Y_1 \\ AX_1 + BX_2 = Y_2. \end{cases}$$

En retranchant la première équation à la seconde, on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} AX_1 + AX_2 = Y_1 \\ (B - A)X_2 = Y_2 - Y_1. \end{cases}$$

Sachant $B - A$ inversible, on exprime X_2 en fonction de Y_1 et Y_2 par la deuxième équation et l'inversibilité de A permet alors d'exprimer X_1 par la première équation

$$\begin{cases} X_1 = (A^{-1} + (B - A)^{-1})Y_1 + (A - B)^{-1}Y_2 \\ X_2 = (A - B)^{-1}Y_1 + (B - A)^{-1}Y_2. \end{cases}$$

Finalement, l'inverse de M est²

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + (B - A)^{-1} & (A - B)^{-1} \\ (A - B)^{-1} & (B - A)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) On note $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les colonnes de B à droite de celles de A .

Montrer

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A) \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B = AU.$$

(b) On note $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les lignes de C en dessous de celles de A .

Montrer

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A) \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), C = VA.$$

(c) En déduire

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A) \Leftrightarrow \exists U, V, \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}.$$