My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مُومْنِي مُولَاي اسْمَاعِيل

# Séries numériques

## Partie III : Les Familles Sommables

*Personnalité du jour* — *Riemann*

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle. On lui doit entre autres les notion de Surface de Riemann, Sphère de Riemann, , Intégrale de Riemann, Hypothèse de Riemann, Somme de Riemann, Théorème de représentation de Riemann, Fonction zêta de Riemann, Théorème de réarrangement de Riemann,...

**Exercice 1** *Étudier la sommabilité dans les cas suivants :*

1) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(i+j)^\alpha}$.

*Réponse: Regroupement $i+j$ constant $\Longrightarrow$ CV ssi $\alpha>2$.*

2) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{i^\alpha+j^\alpha}$.

*Réponse: Pour $\alpha\geq 1$ on a par convexité : $2^{1-\alpha}(i+j)^\alpha\leq i^\alpha+j^\alpha\leq(i+j)^\alpha$ donc il y a convergence ssi $\alpha>2$.*

3) $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}\frac{1}{x^2}$.

*Réponse: Il y a une infinité de termes supérieurs $1/4$.*

4) $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\frac{1}{a^p+b^q}$, $a>1, b>1$.

*Réponse: $\displaystyle\frac{1}{a^p+b^q}\leq\frac{1}{2\sqrt{a}^p\sqrt{b}^q}\Longrightarrow$ sommable.*

**Exercice 2** ***Série des restes.***

1) *Calculer* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}$.

*Réponse:* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k+1}{k!}=2e$.

2) *Calculer* $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^3}$ *en fonction de* $\zeta(3)$.

*Réponse:* $-\dfrac{7}{8}\zeta(3)$.

**Exercice 3** *On pose* $a_{n,p}=\dfrac{1}{n^2-p^2}$ *si* $n\neq p$ *et* $a_{n,n}=0$.

1) *Expliquer simplement pourquoi la suite double* $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ *n'est pas sommable.*

*Indication : Étudier* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,n-1}$

2) *Calculer* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}a_{n,p}$ *et* $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,p}$.

*Réponse:* $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}a_{n,p}=\frac{1}{4n^2}$ *si* $n\neq 0$, $-\dfrac{\pi^2}{6}$ *si* $n=0$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}a_{n,p}=-\frac{\pi^2}{8}=-\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,p}$.

**Exercice 4** *Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. Montrer que :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

**Exercice 5** *La fonction $\zeta$ de Riemann est définie pour tous réel $x > 1$ par :*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

*Calculer les sommes suivantes :*

**1)** $A = \displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2q^2}$

*Réponse:* $A = \zeta(2)^2$

**2)** $B = \displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, p|q} \frac{1}{p^2q^2}$

*Réponse:* $B = \zeta(2)\zeta(4)$.

**3)** $C = \displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, p\wedge q=1} \frac{1}{p^2q^2}$

*Réponse:* $C = A/\zeta(4) = 5/2$.

**Exercice 6** ***La fonction dzêta de Riemann***

*La fonction $\zeta$ de Riemann est définie pour tous réel $x > 1$ par :*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

*Pour tout entier naturel $n$ on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers naturels plus petits que $n$ et premiers avec $n$.*

**1)** *Montrer que* $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d) = n$

**2)** *Montrer que pour tous rel $x > 1$ :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x} = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$$

**3)** *Soit $u$ définie par* $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^q}$ *pour tout $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$.*

*a)* *Montrer que la suite $u$ est sommable et calculer sa somme.*

*b)* *Prouver l'identité suivante :* $\displaystyle\sum_{q=2}^{+\infty}(\zeta(q)-1) = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^q} - 1\right) = 1$.

**Exercice 7** ***Familles de carrés sommables***

**1)** *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Vérifier que :* $\displaystyle\int_{t=-1}^{1} P(t)\,dt + i\int_{\theta=0}^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta = 0$.

*En déduire :* $\displaystyle\int_{t=0}^{1} P^2(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\int_{\theta=-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2\,d\theta$.

**2)** *Soient $2n$ réels positifs $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.*

*Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{a_k b_\ell}{k+\ell} \leq \pi\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^2}$.

**3)** *Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes de carrés sommables.*

*Montrer que la suite double* $\displaystyle\left(\frac{a_k b_\ell}{k+\ell}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable.*