Feuille d'Exercices : Réduction

Partie 4 : Eléments Propres

Étienne Bézout (1730-1783)

Mathématicien du jour

Mathématicien français, il rédige le Cours complet de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie, qui devint plus tard le livre de chevet des candidats au concours d'entrée à l'École polytechnique. Il est également l'auteur d'une Théorie générale des équations algébriques, publiée en 1779, sur la théorie de l'élimination et des fonctions symétriques sur les racines d'une équation : il utilise les déterminants dans un article de l'Histoire de l'Académie royale, parue en 1764, mais ne traite pas de la théorie générale.

Exo 1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est inversible.
   - a. Exprimer $\chi_{A^{-1}}(X)$ en fonction de $\chi_A(X)$.
   - b. En déduire que $\mathrm{sp}(A^{-1}) = (\mathrm{sp}(A))^{-1} = \{\lambda^{-1},\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$.

2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$.
   - a. Exprimer $\chi_{aA+bI_n}(X)$ en fonction de $\chi_A(X)$, a, b et n.
   - b. En déduire que $\mathrm{sp}(aA + bI_n) = a\mathrm{sp}(A) + b = \{a\lambda + b,\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$.

Exo 2 Matrice stochastique Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ coefficients strictement positifs, i.e.

$$\begin{array}{ll} a_{i,j} > 0 & \forall i, j \in [\![1, n]\!] \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 & \forall i \in [\![1, n]\!] \end{array}$$

Montrer les résultats suivants :

1. 1 est valeur propre de A et que E_1 le sous-espace propre associé est de dimension égale à 1 .

2. Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A, on a : $|\lambda| \leq 1$.

3. Si λ est valeur propre telle que $|\lambda| = 1$ alors $\lambda = 1$.

Exo 3 Extrait de E3A 2008

1. On note par E, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $\cos, \sin, \cosh, \sinh$.
   a. Quel est la dimension de E.
   b. Justifier que la dérivation induit sur E un endomorphisme δ.
   c. Déterminer π_δ.

2. a. Justifier que la dérivation induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme δ_n.
   b. Calculer δ_n^{n+1} et $\delta_n^n(X^n)$.
   c. En déduire π_{δ_n}.

Exo 4 Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Donner $\operatorname{rg} J$, en déduire $\dim \ker J$.

2. En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.

3. Calculer J^2, en déduire un polynôme annulateur de J.

4. En déduire le spectre de J, π_J et χ_J.

Exo 5 Centrale MP 2000 .
On considère la matrice de $\mathcal{M}_n(()\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} c & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & c \end{pmatrix}$$

On pose

$$P(x) = \det(U + xI_n)$$

1. Montrer que P est un polynôme de degré 1, de la forme $\alpha x + \beta$.
Indication : Faire des opérations sur les lignes ou colonnes.

2. On suppose que $a \neq b$.
   a) Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$, en déduire α et β
   b) En déduire que $\chi_A(X) = \dfrac{(-1)^n}{a-b}\left(a(X+b-c)^n - b(X+a-c)^n\right)$.
   c) Montrer qu'en général les valeurs propres de A sont sur un cercle.

3. Donner le polynôme caractéristique de A quand $a = b$.

Exo 6 Matrice compagnon .

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} - X^n \in \mathbb{K}_n[X]$, sa matrice compagnon est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et φ l'endomorphisme de E de matrice M dans $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $\chi_M = P$.

2. Calculer $\varphi^k(\vec{e}_1)$ pour $0 \leq k \leq n$.

3. En déduire que $P(M) = 0$, sans utiliser le théorème de Hamilton-Cayley.

4. Application :
   a. Montrer qu'une matrice compagnon est semblable à sa transposée.
   b. En déduire que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrices M et ${}^tM$ sont semblables.