Feuille d'Exercices : Réduction

Partie 5 : Diagonalisation & Trigonalisation

Partie A : Les Must To Do

Exo 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 = \mathrm{Id}$. Justifier $\ker(u - \mathrm{Id}) \oplus \ker(u^2 + u + \mathrm{Id}) = E$

Exo 2

Montrer qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E commute avec un projecteur p si, et seulement si, les espaces $\mathrm{Im}p$ et $\ker p$ sont stables par f.

Exo 3

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On pose $N = \bigcup_{p=0}^{\infty} \ker u^p$ et $I = \bigcap_{p=0}^{\infty} \mathrm{Im} u^p$

a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \ker u^n$ et $I = \mathrm{Im} u^n$.
b) Etablir que N et I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par u et tels que les restrictions de u à N et I soient respectivement nilpotente et bijective.
c) Réciproquement on suppose $E = F \oplus G$ avec F et G sous-espaces vectoriels stables par u tels que les restrictions de u à F et G soient respectivement nilpotente et bijective. Etablir $F = N$ et $G = I$.

Exo 4

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle Montrer qu'il existe une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable par u.

Exo 5

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que tout vecteur non nul en soit vecteur propre. Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exo 6

Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $0 \in \mathrm{sp}(f^n)$. Montrer que $0 \in \mathrm{sp}(f)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible de polynôme caractéristique χ_A. Etablir que pour tout $x \neq 0$,

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{(-1)^n x^n}{\chi_A(0)} \chi_A(1/x)$$

Exo 7

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On désire établir l'égalité des polynômes caractéristiques

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

a) Etablir l'égalité quand $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
b) Pour $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, justifier que pour $p \in \mathbb{N}$ assez grand $A + \frac{1}{p} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
En déduire que l'égalité est encore vraie pour A non inversible.

Partie B : Les Must To Know

Exo 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg} A = 1$.
Etablir A diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{tr} A \neq 0$

Exo 9

Montrer que si A est diagonalisable alors ${}^tA$ l'est aussi.

Exo 10

Soit E un IK-espace vectoriel, u un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.

a) Montrer que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit divise celui de u

b) Montrer que tout polynôme annulateur de u est aussi annulateur pour l'endormphisme induit.

c) Montrer que le polynôme minimal de l'endomorphisme induit divise celui de u

Exo 11

Expliquer brièvement pourquoi ${}^t\mathrm{com}(A)A = \det(A)I_n$
On suppose que A admet n valeurs propres distinctes ; que vaut $\det(A)$?
Que représente un vecteur propre de A pour ${}^t\mathrm{com}(A)$?
On suppose de plus que A n'est pas inversible. Déterminer $\dim \ker {}^t\mathrm{com} A$

Prouver que ${}^t\mathrm{com} A$ n'admet que deux valeurs propres, les expliciter.

Exo 12

Soient $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, A_1 et A_2 le sont.

Exo 13

Soients $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P_n(x) = \det(A_n - xI_n)$

a) Montrer $P_n(x) = -xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$

Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

b) Pour tout $x \in]-2, 2[$, on pose $x = -2\cos\alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[$. Montrerque

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}$$

c) En déduire que $P_n(x)$ admet n racines puis que A_n est diagonalisable.

Quelle est la dimension des sous-espaces propres de A_n ?

c) Déterminer les sous-espaces propres de A_n
Indice : on pourra, pour λ valeur propre de A_n, chercher $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$
vérifiant $AX = \lambda X$ et poser $x_0 = x_{n+1} = 0$.

e) Diagonaliser la matrice A_n

Partie C : Les Outils Concours

Exo 14 Soient f, g endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On suppose que f est diagonalisable. Montrer :

$$f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow \text{ chaque sous-espace propre de } f \text{ est stable par } g$$

Exo 15 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant :

« Tout sous-espace vectoriel stable par f admet un supplémentaire stable »

Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Exo 16 Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
On note $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f.
a) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
b) Montrer qu'un endomorphisme g appartient à $\mathcal{C}_f$ si, et seulement si, chaque sous-espace propre de f est stable par g.
c) En déduire que

$$\dim \mathcal{C}_f = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \alpha_\lambda^2$$

où α_λ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.
d) On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}_f$.

Exo 17 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n admettant exactement n valeurs propres distinctes.
a) Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E.
b) Quelle est la forme de la matrice de f dans cette base ?

Exo 18 Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^\star$, $\lambda \neq \mu$ et $A, B, M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que

$$\begin{aligned} I_p &= A + B \\ M &= \lambda A + \mu B \\ M^2 &= \lambda^2 A + \mu^2 B \end{aligned}$$

a) Montrer que M est inversible et exprimer M^{-1}.
On pourra calculer $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p$
b) Montrer que A et B sont des projecteurs.
c) La matrice M est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

Partie D : Les Applications

Exo 19 Système différentiel. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b Soit $U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et (U_n) dfini par la relation : $U_{n+1} = AU_n$. Calculer U_n en fonction de n.

c Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Résoudre $X'(t) = AX(t)$.

Exo 20 Calcul des puissances de A.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour valeurs propres $1, -2, 2$ et $n \in \mathbb{N}$.

a Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_3$ avec $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

b On considère le polynôme $P(X) = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$. Montrer que : $P(1) = 1$, $P(2) = 2^n$, $P(-2) = (-2)^n$.

c En déduire les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Exo 21 Suites récurrentes linaires.

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

a On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

b Diagonaliser A. En déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n.

Exo 22 Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels satisfaisant aux relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Calculer les valeurs de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0 et z_0.

Partie E : Les Classiques Concours

Exo 23 Trigonalisation simultanée .
Montrer que si $AB = 0$, alors A et B sont simultanément trigonalisables.

Exo 24 Diagonalisation simultanée.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E, qui commutent, c'est à dire tels que $u \circ v = v \circ u$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (resp. $\mu_1, \dots, \mu_q$) les valeurs propres de u (resp. de v), et $F_1, \dots, F_p$ les espaces propres associés (resp. $G_1, \dots, G_q$).

1. Dire pourquoi chaque G_j (resp. F_i) est stable par u (resp. v)

2. On pose $H_{i,j} = F_i \cap G_j$. Soit $i \in \{1, \dots, p\}$.
   - a. Montrer que $H_{i,j} \cap \sum_{k \neq j} H_{i,k} = 0$.
   - b. Soit $x \in F_i$, justifier l'existence des $x_j^i n G_j$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_q$.
   - c. Calculer $u(x)$ de deux façons, en déduire que $x_j \in F_i$.
   - d. Conclure que $F_i = \bigoplus_{j=1}^{q} H_{i,j}$.

3. En déduire l'énoncé suivant :

   Lorsque deux endomorphismes diagonalisables u et v commutent, il existe une base formée de vecteurs propres communs à u et à v (en d'autres termes, u et v sont diagonalisables simultanément dans la même base).

4. Deuxième méthode :
   - a. Dire pourquoi les sous-espace vectoriel G_j sont stable par u.
   - b. En déduire que $u_{|G_j}$ est diagonalisable.
   - c. En déduire qu'il existe une base formée de vecteurs propres communs à u et à v

5. Application Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables qui commutent.
   - a. Montrer qu'il existe P inversible et D, D' diagonales, telle que $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$.
   - b. En déduire que $A + B, A - B$ et AB sont diagonalisable.

Exo 25 Décomposition de Dunford .

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se propose de montrer qu'il existe deux matrices uniques D, N telles que $A = D + N$, D est diagonalisable, N est nilpotente, $DN = ND$. Pour cela on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}$ associé à la matrice A dans une base donnée de E, on pose $\pi_u(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $E_i = \ker(u - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$ et enfin $u_i = u|_{F_i}$.

1 Existence : a) Dire pourquoi $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

b) Soit $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ une base adaptée à cette somme, que peut-on dire de la forme de $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

c) Montrer que $u_i - \lambda_i \mathrm{id}_{E_i}$ est nilpotent.

d) Soit $B_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_i}(u_i)$, montrer que $B_i = D_i + N_i$ avec D_i matrice scalaire et N_i nilpotente.

e) En déduire l'existence de la décomposition de Dunford.

2 Unicité :
Soit $A = D' + N'$ une autre décomposition de Dunford. On pose $D' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(d')$ et $N' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(n')$.

a) Montrer que $AD' = D'A$

b) En déduire que les E_i sont stables par d'.

c) Que peut-on dire de la forme de D'.

d) En déduire que $DD' = D'D$, puis que $D - D'$ est diagonalisable.

e) En déduire que $D = D'$, puis conclure.

Exo 26 Centrale MP 2003.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}E$. On considère l'application

$$\Phi_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \longmapsto & v \circ u \end{array}$$

1 Montrer que $\Phi_u \in \mathcal{L}\left(\mathcal{L}(E)\right)$.

2 On se propose de montrer l'équivalence suivante : (u est diagonalisable) $\Longleftrightarrow$ Φ_u est diagonalisable)

a) 1ère méthode :

i) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $v \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$P(\Phi_u)(v) = v \circ P(u)$$

ii) En déduire que u et Φ_u ont mêmes polynômes annulateurs, puis conclure.

b) 2ème méthode :

i) Montrer que $\lambda \in^{(} \Phi_u) \Longleftrightarrow u - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas surjectif.

ii) En déduire que $^{(}\Phi_u) =^{(} u)$.

iii) Soit $\lambda \in^{(} u)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(\Phi_u(v) = \lambda v)$. Montrer que :

α) Im $(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset \ker v)$.

β) $\ker(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{L}E})$ est isomorphe $\mathcal{L}H, E$ où H est un supplémentaire de Im $(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.

γ) $\dim(\ker(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)})) = \dim(E) \dim(\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$

iv) Conclure.