My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Feuille d'Exercices : Réduction

Partie 1 : Matrices Par Blocs

Exercice 1

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et M la matrice $M = \begin{pmatrix} A & O_{n,p} \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$.

Établir

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B).$$

Indication

Il existe donc $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $R, S \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$PAQ = J_r \text{ et } RBS = J_s.$$

Exercice 2

Soient $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Montrer $$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} = n + \mathrm{rg}(C).$$

Indication : Multiplier par la matrice inversible $\begin{pmatrix} I_n & -B \\ O_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$

Exercice 3

Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ O_{q,p} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$.

Déterminer le rang de M en fonction de celui de C.

Indication : Multiplier par la matrice inversible $M' = \begin{pmatrix} A^{-1} & O_{p,q} \\ O_{q,p} & I_q \end{pmatrix}$.

Partie 2 : Eléments Propres

Exo 1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est inversible.
   a. Exprimer $\chi_{A^{-1}}(X)$ en fonction de $\chi_A(X)$.
   b. En déduire que $\mathrm{sp}(A^{-1}) = (\mathrm{sp}(A))^{-1} = \{\lambda^{-1},\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$.

2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$.
   a. Exprimer $\chi_{aA+bI_n}(X)$ en fonction de $\chi_A(X)$, a, b et n.
   b. En déduire que $\mathrm{sp}(aA + bI_n) = a\,\mathrm{sp}(A) + b = \{a\lambda + b,\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$.

Exo 2 .
On considère la matrice de $\mathcal{M}_n(()\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} c & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & c \end{pmatrix}$$

On pose

$$P(x) = \det(U + xI_n)$$

1. Montrer que P est un polynôme de degré 1, de la forme $\alpha x + \beta$.
   Indication : Faire des opérations sur les lignes ou colonnes.

2. On suppose que $a \neq b$.
   a) Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$, en déduire α et β
   b) En déduire que $\chi_A(X) = \dfrac{(-1)^n}{a-b}\left(a(X+b-c)^n - b(X+a-c)^n\right)$.
   c) Montrer qu'en général les valeurs propres de A sont sur un cercle.

3. Donner le polynôme caractéristique de A quand $a = b$.

Exo 3 Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que rg(J)=1

1. , en déduire $\dim\ker J$.

2. En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.

3. Calculer J^2, en déduire un polynôme annulateur de J.

4. En déduire le spectre de J, π_J et χ_J.

5. En déduire une CNS pour que J soit diagonalisable

Partie 3 : Diagonalisation & Trigonalisation

Partie A : Les Must To Do

Exo 1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 = \mathrm{Id}$. Justifier $\ker(u - \mathrm{Id}) \oplus \ker(u^2 + u + \mathrm{Id}) = E$

Exo 2 Montrer qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E commute avec un projecteur p si, et seulement si, les espaces $\mathrm{Im}p$ et $\ker p$ sont stables par f.

Exo 3 Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On pose $N = \bigcup_{p=0}^{\infty} \ker u^p$ et $I = \bigcap_{p=0}^{\infty} \mathrm{Im} u^p$

a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \ker u^n$ et $I = \mathrm{Im} u^n$.
b) Etablir que N et I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par u et tels que les restrictions de u à N et I soient respectivement nilpotente et bijective.
c) Réciproquement on suppose $E = F \oplus G$ avec F et G sous-espaces vectoriels stables par u tels que les restrictions de u à F et G soient respectivement nilpotente et bijective. Etablir $F = N$ et $G = I$.

Exo 4 Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle Montrer qu'il existe une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable par u.

Exo 5 Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que tout vecteur non nul en soit vecteur propre. Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exo 6 Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $0 \in \mathrm{sp}(f^n)$. Montrer que $0 \in \mathrm{sp}(f)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible de polynôme caractéristique χ_A. Etablir que pour tout $x \neq 0$,

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{(-1)^n x^n}{\chi_A(0)} \chi_A(1/x)$$

Exo 7 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On désire établir l'égalité des polynômes caractéristiques

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

a) Etablir l'égalité quand $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
b) Pour $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, justifier que pour $p \in \mathbb{N}$ assez grand $A + \frac{1}{p} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
En déduire que l'égalité est encore vraie pour A non inversible.

Partie B : Les Must To Know

Exo 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{rg}A = 1$.

Etablir A diagonalisable si, et seulement si, $\text{tr}A \neq 0$

Exo 9

Montrer que si A est diagonalisable alors ${}^tA$ l'est aussi.

Exo 10

Soit E un IK-espace vectoriel, u un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.

a) Montrer que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit divise celui de u

b) Montrer que tout polynôme annulateur de u est aussi annulateur pour l'endormphisme induit.

c) Montrer que le polynôme minimal de l'endomorphisme induit divise celui de u

Exo 11

Expliquer brièvement pourquoi ${}^t\text{com}(A)A = \det(A)I_n$

On suppose que A admet n valeurs propres distinctes ; que vaut $\det(A)$?

Que représente un vecteur propre de A pour ${}^t\text{com}(A)$?

On suppose de plus que A n'est pas inversible. Déterminer $\dim \ker {}^t\text{com}A$

Prouver que ${}^t\text{com}A$ n'admet que deux valeurs propres, les expliciter.

Exo 12

Soient $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, A_1 et A_2 le sont.

Exo 13

Soient $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P_n(x) = \det(A_n - xI_n)$

a) Montrer $P_n(x) = -xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$

Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

b) Pour tout $x \in]-2, 2[$, on pose $x = -2\cos\alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[$. Montrerque

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}$$

c) En déduire que $P_n(x)$ admet n racines puis que A_n est diagonalisable.

Quelle est la dimension des sous-espaces propres de A_n ?

c) Déterminer les sous-espaces propres de A_n

Indice : on pourra, pour λ valeur propre de A_n, chercher $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vérifiant $AX = \lambda X$ et poser $x_0 = x_{n+1} = 0$.

e) Diagonaliser la matrice A_n

Partie C : Les Type Concours

Exo 14 Soient f, g endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On suppose que f est diagonalisable. Montrer :

$$f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow \text{ chaque sous-espace propre de } f \text{ est stable par } g$$

Exo 15 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant :

« Tout sous-espace vectoriel stable par f admet un supplémentaire stable »

Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Exo 16 Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
On note $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f.
a) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
b) Montrer qu'un endomorphisme g appartient à $\mathcal{C}_f$ si, et seulement si, chaque sous-espace propre de f est stable par g.
c) En déduire que

$$\dim \mathcal{C}_f = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \alpha_\lambda^2$$

où α_λ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.
d) On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $(\mathrm{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}_f$.

Exo 17 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n admettant exactement n valeurs propres distinctes.
a) Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E.
b) Quelle est la forme de la matrice de f dans cette base ?

Exo 18 Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^\star$, $\lambda \neq \mu$ et $A, B, M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que

$$\begin{aligned} I_p &= A + B \\ M &= \lambda A + \mu B \\ M^2 &= \lambda^2 A + \mu^2 B \end{aligned}$$

a) Montrer que M est inversible et exprimer M^{-1}.
On pourra calculer $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p$
b) Montrer que A et B sont des projecteurs.
c) La matrice M est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

Partie D : Les Applications Classiques

Exo 19 Système différentiel. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b Soit $U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et (U_n) dfini par la relation : $U_{n+1} = AU_n$. Calculer U_n en fonction de n.

c Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Résoudre $X'(t) = AX(t)$.

Exo 20 Calcul des puissances de A.
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour valeurs propres $1, -2, 2$ et $n \in \mathbb{N}$.

a Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_3$ avec $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

b On considère le polynôme $P(X) = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$. Montrer que : $P(1) = 1$, $P(2) = 2^n$, $P(-2) = (-2)^n$.

c En déduire les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Exo 21 Suites récurrentes linaires.
Soit (u_n) une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

a On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

b Diagonaliser A. En déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n.

Exo 22 Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels satisfaisant aux relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Calculer les valeurs de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0 et z_0.