PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA - LÉON L'AFRICAIN

Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُوني مُولاَي اسمَاعِيل

Analyse (Sup MPSI)

Partie III : Intégration

Exercice 1 : Lemme de Lebesgue

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, montrer que :*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) \ dt = 0$$

dans les cas suivants :

1) f *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a, b]$.

2) f *en escalier sur* $[a, b]$.

3) f *continue par morceaux sur* $[a, b]$

Exercice 2 : ***Intégrales de Wallis.***

On note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \ dt$.

1) *Comparer* I_n *et* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \ dt$.

2) *En coupant* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *en* $[0, \alpha]$ *et* $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, *démontrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

3) *Chercher une relation de récurrence entre* I_n *et* I_{n+2}.
En déduire I_{2k} *et* I_{2k+1} *en fonction de* k.

4) *Démontrer que* $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

5) *Montrer que la suite* (I_n) *est décroissante*

6) *Démontrer que* $I_n \sim I_{n-1}$ *et en déduire un équivalent simple de* I_n *puis de* $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$ *quand* $n \to \infty$.

Exercice 3. *Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les intervalles cités.*

1) $f(x) = \dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$, *sur* $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$, *sur* $]0,1[$.

3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$, *sur* $]0,+\infty[$, *où* α *paramètre réel.*

4) $f(x) = x^\alpha \left|\ln x\right|^\beta$, *sur* $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$, *où* α, β *paramètres réels.*
Intégrales de Bertrand.

5) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1-x}$ *et* $g(x) = \dfrac{1-x}{\ln x}$ *sur* $]0,1[$.

6) $g : x \mapsto \dfrac{\ln(x+1) - \ln 2}{x^2-1}$ *et* $h : x \mapsto \dfrac{\ln(x+1) - x\ln 2}{x^2-1}$.

Exercice 4. ***Intégrales de Wallis.***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose :* $w_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t$.

1) *Donner une relation entre* w_n *et* w_{n-1}, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

2) *Exprimer* w_n *en fonction de* n, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

3) *Donner un équivalent simple de* w_n, *quand* $n \longrightarrow +\infty$.
On pourra utiliser la relation de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

4) *En déduire* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}w_n$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 5. ***Étude d'une suite d'intégrales.***

1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose :* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

a) *Donner une relation entre* I_n *et* I_{n-1}, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :* $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

a) *Montrer que* J_n *est bien définie.*

b) *Donner une relation entre* J_n *et* J_{n-1}, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

c) *Exprimer* J_n *en fonction de* n, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

d) *Donner un équivalent simple de* J_n, *quand* $n \longrightarrow +\infty$.
On pourra utiliser la relation de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

e) *Montrer que* $0 \leq J_n - I_n \leq \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

f) *En déduire* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 6. ***Intégrale de Gauss.***

1) *Montrer que* $\ln(1+x) \leq x$, *pour tout réel* $x > -1$.

2) *En déduire que* $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x} \leq \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$, $\forall\, x \in [0, n[$.

3) *Montrer que,* $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ *est intégrable sur* $[0, +\infty[$, *puis en déduire que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Indication : On pourra utiliser l'encadrement :
$\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x^2} \leq \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$, *pour tout* $x \in [0, \sqrt{n}[$, *puis utiliser* ***exercices 4 et 5.***

Exercice 7. ***La constante d'Euler.***

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $\gamma_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

1) *Montrer que* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est monotone bornée entre 0 et 1, donc converge, on notera* γ *sa limite, appelée constante d'Euler.*
Indication : Penser à utiliser le TAF, ou bien l'inégalité : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, *pour tout* $k \geq 2$.

2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :* $J_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\,\mathrm{d}t$.
Montrer que J_n *est bien définie.*
On admet dans la suite que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = -\gamma$, *qu'il est possible de montre à l'aide d'une intégration par parties ou changement variable.*

3) *On pose* $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln x\,\mathrm{d}x$.

   a) *Montrer que* K *est bien définie.*

   b) *Montrer que* $\ln(1+x) \leq x$, *pour tout réel* $x > -1$.

   c) *En déduire que* $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x}$, *pour tout* $x \in [0, n[$.

   d) *Montrer que pour tout* $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$, *on a :* $x - x^2 \leq \ln(1+x)$.

   e) *En déduire que pour tout*

$$
\begin{array}{lll}
n \geq 4, t \in [0, \sqrt{n}] & \textit{on a :} & t + n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \geq -\dfrac{t^2}{n} \\
n \geq 4, t \in [0, \sqrt{n}] & \textit{on a :} & -\dfrac{t^2}{n} \geq \ln\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right) \\
n \geq 4, t \in [0, n] & \textit{on a :} & \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \geq \mathrm{e}^{-t}\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right) \\
n \geq 4, t \in [0, n] & \textit{on a :} & 0 \leq \mathrm{e}^{-t} - \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leq \dfrac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{n}
\end{array}
$$

   f) *En déduire que* $K = -\gamma$.