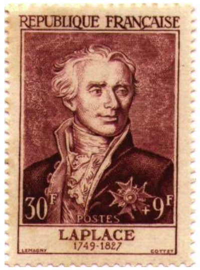
Feuille d'exercices
Intégrales à un paramètre

Blague du jour :

Une maman à sa jeune fille :
- Je te conseille d'épouser un archéologue.
- Ah bon ? Et pourquoi ?
- Parce que plus on vieillit, plus il vous aime.



Mathématicien du jour **Laplace**

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) est un mathématicien, astronome et physicien français, nommé ministre, comte et marquis. Il a contribué à l'émergence des théories de probabilité, d'astronomie mathématique. Il a transformé l'approche géométrique de la mécanique développée par Newton en une approche fondée sur l'analyse mathématique.

Remerciements : à Mrs Hafid Basso (Casablanca), Sadik Boujaida (Rabat) et Michel Quercia (Dijon) pour la source latex de ces exercices.

Exo 1

On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$ et $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{t^2+1}\,dt$.

1) Montrer que f et g sont définies et de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.
2) Montrer que f et g sont solutions de l'équation : $y"+y=\dfrac{1}{x}$.
3) Étudier les limites de f et g en $+\infty$.
4) Trouver une relation entre f et g.

Exo 2

On pose $H(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{ixt}dt$

1) Montrer que la fonctions H est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que H est une solution de l'équation différentielle :
$$(E)\quad (x+i)y'+\frac{1}{2}y=0.$$
3) On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\Phi(x)=\left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2+\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}dt$.
Montrer que Φ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, préciser la valeur de cette constante.
En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$, puis celle de $H(0)$.
4) Résoudre l'équation (E) et donner l'expression de $H(x)$.

Exo 3

On pose $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n n}{n^2+x^2}$ et $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$.

1) Etudier l'ensemble de définition de f. Calculer $f(0)$.
2) Montrer que f est C^∞. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos(bt)\,dt$.
3) En déduire que $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos xt}{1+e^t}\,dt$.
4) Développer f en $+\infty$ sous la forme : $f(x)=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^4}+o(\dfrac{1}{x^4})$.

Exo 4

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty}f=1$ et $f(0)=1$.

On pose $\phi(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\left(\frac{\sin xt}{t}\right)^2dt$ et $H(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$.

1) Quel est le domaine de définition de ϕ ? Exprimer la limite L en 0^+ de $\dfrac{\phi(x)}{x}$ à l'aide d'une intégrale.
2) Prouver que l'on a $L=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.
3) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de H.
4) Calculer H' puis expliciter H.

Exo 5

On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$

1) Montrer rapidement que : $\forall u \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+u) \leq u$.
2) Montrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$.
3) En déduire que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)..(x+n)}$.
4) On pose pour $n \geq 1$, $f_n(x) = \ln\left(\frac{n^x n!}{x(x+1)..(x+n)}\right)$

   Montrer en utilisant la série de fonctions $\sum f_n - f_{n-1}$ que :
$$\forall x \in]0,+\infty[\,,\ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}.$$
   Où γ désigne la constante d'Euler.
5) **Formule de Stirling :** Montrer que $\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$ pour x réel tendant vers $+\infty$.

   Indication: $\ln\Gamma$ est convexe, encadrer $\ln\Gamma(x)$ par les cordes passant par $(\lfloor x\rfloor, \ln\Gamma(\lfloor x\rfloor))$.
6) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et comparer.

Exo 6

Fonction définie par une intégrale.

1) On pose pour $x \geq 0$: $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$.

   Calculer explicitement $f'(x)$ et en déduire $f(x)$ (on calculera $f(0)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$).
2) On pose $I(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2\sin^2 t)\,dt$. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer $I'(x)$ puis en déduire $I(x)$.
3) Soit $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{e^x - 1}\,dx$.
   a) Justifier l'existence de $I(\alpha)$.
   b) Déterminer les réels a et b tels que : $I(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{b+n^2}$.

      Indication: $a = \alpha$, $b = \alpha^2$.
   c) Donner un équivalent de $I(\alpha)$ quand $\alpha \longrightarrow \infty$.

      Indication: comparaison série-intégrale.

Exo 7

Intégrale de Gauss

On considère les fonctions définies par :
$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

1) Montrer que f et g sont dérivables et calculer f' et g'.
2) Montrer que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
3) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
4) En déduire l'existence et la valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-(t^2+a^2/t^2)}\,dt$. **Indication:** $u = \frac{a}{t}$.
5) Soit $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\,\d{t}$. Prouver que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
6) Chercher une relation simple entre I et I'.

   Indication: $I'(x) = -2xI(x)$.
7) En déduire la valeur de $I(x)$

Exo 8

Considérons $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}e^{ixt}}{\sqrt{t}}dt$.

1) Vérifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa drive.
2) En déduire une autre expression de f.

Exo 9

Posons $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x dt$.

1) Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2) Montrer que f est une fonction continue sur $\mathcal{D}_f$.
3) Établir une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$, puis montrer que $xf(x)f(x+1)$ est une fonction constante.
4) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exo 10

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)}dt$.

1) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2) Étudier la régularité de f.
3) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exo 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$.

1) Déterminer le domaine définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2) Montrer que f est C^1 sur $\mathcal{D}_f$
3) Montrer que f satisfait une équation différentielle du premier ordre sur $\mathcal{D}_f$.
4) En déduire une autre écriture pour f.

Exo 12

On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + x\cos t)}{\cos t}$

1) Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2) Montrer que f est C^1 sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_f$.
3) En déduire une autre écriture de f.

Exo 13

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et calculer f'.
2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f = 0$.
3) En déduire une autre écriture de f.

Exo 14

$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t}dt$

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2) Montrer que f est C^1 sur $\mathcal{D}_f$ et calculer f'
3) Limites de f aux bornes

Exo 15

Étude et graphe de $x \mapsto \int_x^{x^2} e^{-t^2}dt$.

Exo 16

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$
2) Montrer que f est C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\lim\limits_{0^+} f$
3) Calculer $f + f''$ puis montrer que $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}dt$
4) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

Exo 17

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t^2+1}\,dt$.

1) Montrer que f et g sont définies et C^2 sur $]0, +\infty[$.
2) Montrer que f et g sont solutions de : $y'' + y = \frac{1}{x}$.
3) Étudier les limites de f et g en $+\infty$.
4) Trouver une relation entre f et g.

Exo 18

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin at}{1+t^2}$

1) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de f.
2) Calculer f et f''. En déduire une équation différentielle satisfaite par f.
3) Expliciter f l'aide de fonctions usuelles.
4) Limite en $+\infty$ de f et f' En déduire f.

Exo 19

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt$.

Domaine de définition, continuité, dérivabilité, calcul de f' puis de f. Calculer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$

Exo 20

On pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n n}{n^2+x^2}$ et $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1) Étudier l'ensemble de définition de f.
2) Calculer $f(0)$.
3) Montrer que f est C^∞.
4) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(bt)\,dt$.
5) En déduire que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+e^t}\,dt$.
6) Développer f en $+\infty$ sous la forme : $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^4} + o(\frac{1}{x^4})$.

Exo 21

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue tendant vers 1 en $+\infty$ et $f(0) = 1$.

On pose $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\left(\frac{\sin xt}{t}\right)^2 dt$ ainsi que $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t} dt$.

1) Quel est le domaine de définition de ϕ ? Exprimer la limite L en 0^+ de $\dfrac{\phi(x)}{x}$ l'aide d'une intégrale.

2) Prouver que l'on a $L = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t} dt$.

3) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de H.

4) Calculer H' puis expliciter H.

Exo 22

Calcul de limite.

1) a) Prouver l'existence pour $x > 0$ de $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t + x} dt$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} I(x)$.

Indication: Développer $\sin(t - x)$.

2) Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Chercher $\displaystyle\lim_{x \to 0^+}\int_0^1 \frac{xf(t)}{x^2 + t^2} dt$.

Indication: $\dfrac{\pi}{2} f(0)$.

3) Donner un équivalent pour $x \longrightarrow +\infty$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x^2 + t^2} dt$.

Indication: $t = ux$ puis intégration par parties.

4) Soit $a > 0$. Donner le DL en $x = 1$ l'ordre 3 de $f(x) = \displaystyle\int_{t=a/x}^{ax}\frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$.

Indication: Calculer $f'(x)$.

5) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue. On pose $\varphi(x) = \left(\displaystyle\int_{t=a}^{b} (f(t))^x\, dt\right)^{1/x}$.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}\varphi(x) = \max(f)$.

b) On suppose $f > 0$ et $b - a = 1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}\varphi(x)\exp\left(\int_{t=a}^{b}\ln(f(t))\, \underset{.}{t}\right)$.

Indication: Montrer que pour $\varepsilon > 0$ et x assez petit, $\left|f(t)^x - 1 - x\ln(f(t))\right| \leq \varepsilon x$ puis intégrer.

6) a) Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\, dt = f(0)$.

Indication: Couper en $\displaystyle\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1}$

b) Chercher un équivalent pour $n \longrightarrow +\infty$ de $\displaystyle\int_{t=0}^{1}\frac{t^n\, dt}{1 + t^n}$.

Fin

À la prochaine