Prof. MAMOUNI
myismail.net

Familles de polynômes classiques

Exercice 1 *(Polynômes d'interpolation de Lagrange)*

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ on pose

$$L_i = \frac{\prod_{0\le j\le n, j\neq i}(X-a_j)}{\prod_{0\le j\le n, j\neq i}(a_i-a_j)}.$$

(a) Observer que, pour tout $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, on a $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$
(où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker (1823-1891) qui est égal à 1 lorsque $i = j$ et 0 sinon).
(b) Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \ P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)\, L_i(X).$$

Exercice 2 *(Polynômes de Tchebychev)*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : [-1;1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_n(x) = \cos\big(n \arccos(x)\big).$$

(a) Soit $x \in [-1;1]$. Simplifier $f_0(x)$, $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et donner $f_3(x)$.
(c) Établir qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1;1]$.
(d) Donner le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.
(e) Montrer que T_n possède n racines distinctes toutes dans l'intervalle $]-1;1[$.

Exercice 3 *(Polynômes de Tchebychev)* MINES (MP)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P\left(\cos(\theta)\right) = \cos(n\theta)$ pour tout θ réel. On le note T_n.

(a) Lier T_{n-1}, T_n et T_{n+1}.
(b) Donner une équation différentielle vérifiée par T_n.
(c) Calculer $T_n^{(k)}(1)$ et $T_n^{(k)}(-1)$.

Exercice 4 *(Polynômes de Laguerre)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$L_n(x) = \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x} x^n\right).$$

Observer que L_n est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

Exercice 5 *(Polynômes de Legendre)*

Pour tout entier naturel n, on pose

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!}\left(\left(X^2-1\right)^n\right)^{(n)}.$$

(a) Montrer que L_n est un polynôme unitaire de degré n.
(b) Vérifier que pour tout polynôme réel Q avec $\deg(Q) < n$, on a

$$\int_{-1}^{1} L_n(t)\, Q(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

(c) En déduire que L_n possède n racines simples toutes dans l'intervalle $]-1;1[$.

Exercice 6 *(Polynômes de Fibonacci)*

On considère la suite de polynômes (F_n) déterminée par

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \quad \text{et} \quad F_{n+2} = XF_{n+1} + F_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer

$$F_{k+n} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

(c) Établir $F_{a+b} \wedge F_b = F_a \wedge F_b$.

(d) Conclure $F_a \wedge F_b = F_{a \wedge b}$.

Exercice 7 *(Polynômes de Tchebychev)*

On définit une suite de polynôme (P_n) par

$$P_0 = 2, P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

(a) Calculer P_2 et P_3.
Déterminer degré et coefficient dominant de P_n.
(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a

$$P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n.$$

(c) En déduire une expression simple de $P_n\left(2\cos(\theta)\right)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
(d) Déterminer les racines de P_n.

Exercice 8 *(Polynômes de Fibonacci)*

Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ la suite de $\mathbb{K}[X]$ définie par

$$P_0 = 0, P_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

(a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}.$$

(b) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ sont premiers entre eux .}$$

(c) Établir pour que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m.$$

(d) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\operatorname{pgcd}(P_{m+n}, P_n) = \operatorname{pgcd}(P_n, P_m).$$

En déduire que $\operatorname{pgcd}(P_m, P_n) = \operatorname{pgcd}(P_n, P_r)$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n.

(e) Conclure

$$\operatorname{pgcd}(P_n, P_m) = P_{\operatorname{pgcd}(m,n)}.$$

Exercice 9 *Formule de Van der Monde*

Soit $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$. On pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$ on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Démontrer que $\mathcal{B} = (P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer les composantes dans $\mathcal{B}$ de $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(X^n(1-X)^n\right)$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$.

Exercice 10 *Opérateur différence*

On note $U_p = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}$, $\quad p \in \mathbb{N}$, et $\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$

1) Démontrer que la famille $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
2) Calculer $\Delta^n(U_p)$.
3) En déduire que : $\forall\, P \in \mathbb{K}_n[X]$, ona $P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \ldots + (\Delta^n P)(0)U_n$.
4) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que :
$$\left(\forall\, n \in \mathbb{Z}, \text{ on a } P(n) \in \mathbb{Z}\right) \iff \left(\text{les coordonnées de } P \text{ dans la base } (U_p) \text{ sont entières}\right).$$
5) Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction quelconque. Démontrer que f est polynomiale si et seulement si : $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tq $\Delta^n(f) = 0$.

Exercice 11 : Polynômes de Bernstein

Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour n entier naturel non nul donné , le n-ième polynôme de Bernstein associé à f est :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k(1-X)^{n-k}.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k(1-X)^{n-k} = 1.$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k(1-X)^{n-k} = X.$$

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k(1-X)^{n-k} = nX(1-X).$$

4. Montrer que :

$$\boxed{\text{La suite } (B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ des polynômes de Bernstein converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,1].}$$

Théorème **Weirstrass.**