PRÉPAS ELBILIA

GROUPE ELBILIA · LÉON L'AFRICAIN

Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُوني مُولَاي اسمَاعِيل

Analyse (Sup MPSI)

Partie I : Suites Numériques

Ernesto Cesàro (1859-1906)

Mathématicien italien, connu pour ses contributions à la géométrie différentielle et à la théorie des séries infinies. Les contributions principales de Cesàro appartiennent au champ de la géométrie différentielle, notamment la construction d'une courbe fractale, la "courbe à flocon de neige" de Koch, continue mais dérivable nulle part. Il proposa aussi une définition possible de la limite d'une suite divergente, connue aujourd'hui comme "Somme de Cesàro". Sa mort fut tragique, elle se produisit alors qu'il tentait de sauver son plus jeune fils Manlio qui était en train de se noyer

Exo 1 Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}, l \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \quad , w_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} u_i}$

1. Montrer que $\lim u_n = l \Longrightarrow \lim v_n = l$.
2. A l'aide d'une contre exemple montrer que la réciproque est fausse
3. Montrer en revanche que : $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim v_n = +\infty$.
4. Montrer que $\lim u_n = l \Longrightarrow \lim w_n = l$

Exo 2

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exo 3 **π l'aide de la méthode de Viete**

1. Soit $0 < \theta < \pi$ tel que $\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   - i. Montrer que les suites $2^n \sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ et $2^n \tan\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ sont adjacentes.
   - ii. Calculer leurs limites communes.
2. Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} & , v_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} & , v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$
3. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

   Indication : On pourra utiliser les relations : $\begin{cases} 1 + \cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} \\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$.
4. En déduire que $\lim\limits_{\infty}\left(v_n\sqrt{2 - u_n}\right) = \pi$.

Exo 4

1 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $a<b$, on pose : $\begin{cases} u_0=a, u_1=b \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+u_{n-1}}{2}\end{cases}$

i Montrer que $(u_{2n}),(u_{2n+1})$ sont adjacentes.

ii Calculer $u_{n+1}-u_n$, en déduire $\lim u_n$.

2 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $a<b$, on pose : $\begin{cases} a_0=a & , b_0=b \\ a_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n} & , b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}\end{cases}$

i Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes.

ii Calculer leurs limites communes.

Exo 5

Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a>b$, on pose : $\begin{cases} a_0=a & , b_0=b \\ a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2} & , b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\end{cases}$

1 Montrer que ces suites sont bien définies.

2 Montrer qu'elles sont adjacentes.
On note par $M(a,b)$ leurs limite commune qu'on appelle moyenne *arithmico - géométrique* de a et b.

3 Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $\left|a_n^2-b_n^2\right|\leq 16b^2\left(\dfrac{a^2-b^2}{16b^2}\right)^{2^n}$

4 Donner une majoration de $|a_n-M(a,b)|$ et $|M(a,b)-b_n|$ en fonction de a,b,n

5 En déduire une valeur approche par défaut et une par excès de $M(2,1)$ à 10^{-4} prés.

Exo 6

1 Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a<b$, on pose : $\begin{cases} a_0=a & , b_0=b \\ a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2} & , b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}\end{cases}$

i Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes.

ii Exprimer leurs limites communes en fonction de $\theta=\arccos\left(\dfrac{a}{b}\right)$.
Indication : On pourra d'abord commencer par exprimer les a_n,b_n en fonction de θ.

2 soit $n\in\mathbb{N}$, et P_n le polygne régulier 2^n côts et de périmètre 2, soit r_n le rayon du cercle inscrit et R_n celui du cercle circonscrit P_n.

i Montrer que $\forall n\geq 2$ on a : $r_{n+1}=\dfrac{r_n+R_n}{2}, R_{n+1}=\sqrt{r_{n+1}R_n}$

ii En déduire qu'elle sont adjacentes.

iii En remarquant que : $\dfrac{1}{R_n}\leq\pi\leq\dfrac{1}{r_n}$ en déduire que $\dfrac{1}{R_n},\dfrac{1}{r_n}$ convergent vers π.

Fin