

## ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

### Partie 3 : Orthogonalité vs. Matrices & Endomorphismes

Exo  
1

Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté  $(|)$ .

On pose  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .

Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on note  $u^*$  l'adjoint de  $u$ .

1. Un endomorphisme  $u$  de  $E$  vérifiant  $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$  est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .  
Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
  - i.  $u \circ u^* = u^* \circ u$ .
  - ii.  $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$ .
  - iii.  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ .

Exo  
2

1. Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ .

Prouver que  $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{sp}(A) \subset [0, +\infty[$ .

2. Prouver que  $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$ .

3. Prouver que  $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \forall B \in S_n^+(\mathbb{R}), AB = BA \implies A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$ .

4. Soit  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ .

Prouver qu'il existe  $B \in S_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $A = B^2$ .

Exo  
3

Soit  $P$  le plan d'équation  $x + y + z = 0$  et  $D$  la droite d'équation  $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ .

1. Vérifier que  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ .
2. Soit  $p$  la projection vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  sur  $P$  parallèlement à  $D$ .  
Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .  
Déterminer  $p(u)$  et donner la matrice de  $p$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Déterminer une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $p$  est diagonale.

Exo  
4

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$ .

On pose :  $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$  où  $\text{tr}$  désigne la trace et  $A^T$  désigne la transposée de la matrice  $A$ .

1. Prouver que  $\langle , \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. On note  $S_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $E$ .  
Une matrice  $A$  de  $E$  est dite antisymétrique lorsque  $A^T = -A$ .  
On note  $A_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques de  $E$ .  
On admet que  $S_n(\mathbb{R})$  et  $A_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .
  - (a) Prouver que  $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ .
  - (b) Prouver que  $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$ .
3. Soit  $F$  l'ensemble des matrices diagonales de  $E$ .  
Déterminer  $F^\perp$ .

**Exo 5** Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $n > 0$ .

On admet que, pour tout  $x \in E$ , il existe un élément unique  $y_0$  de  $F$  tel que  $x - y_0$  soit orthogonal à  $F$  et que la distance de  $x$  à  $F$  soit égale à  $\|x - y_0\|$ .

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , on pose  $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$ .

1. Démontrer que  $(. | .)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Calculer la distance de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  au sous-espace vectoriel  $F$  des matrices triangulaires supérieures.

**Exo 6** On définit dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'application  $\varphi$  par :  $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$ , où  $\text{tr}(A^T A')$  désigne la trace du produit de la matrice  $A^T$  par la matrice  $A'$ .

On admet que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On note  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

1. Démontrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .
3. Déterminer le projeté orthogonal de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\mathcal{F}^\perp$ .
4. Calculer la distance de  $J$  à  $\mathcal{F}$ .

**Exo 7** Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues et  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Démontrer que  $(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
2. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $f : x \mapsto \cos x$  et  $g : x \mapsto \cos(2x)$ .

Déterminer le projeté orthogonal sur  $F$  de la fonction  $u : x \mapsto \sin^2 x$ .

**Exo 8** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

1. Soit  $h$  une fonction continue et positive de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Démontrer que  $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$ .

2. Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose :  $\forall (f, g) \in E^2, (f | g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ .

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .

3. Majorer  $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$  en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**Exo 9** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .  
On note  $(x|y)$  le produit scalaire de  $x$  et de  $y$  et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée.

1. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , tel que :  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .
  - (a) Démontrer que :  $\forall (x, y) \in E^2 (u(x)|u(y)) = (x|y)$ .
  - (b) Démontrer que  $u$  est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble  $\mathcal{O}(E)$  des isométries vectorielles de  $E$ , muni de la loi  $\circ$ , est un groupe.
3. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .  
Prouver que :  $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est une base orthonormée de  $E$ .

**Exo 10** Soit  $E$  un espace euclidien.

1. Soit  $A$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
Démontrer que  $(A^\perp)^\perp = A$ .
2. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .
  - (a) Démontrer que  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .
  - (b) Démontrer que  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

**Exo 11** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté  $(|)$ .  
On pose  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.  
(b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$ .  
Prouver que l'ensemble  $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}$  admet une borne inférieure  $m$  et déterminer la valeur de  $m$ .

