

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Partie 3 : Orthogonalité vs. Matrices & Endomorphismes

Exo
1

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(|)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Pour tout endomorphisme u de E , on note u^* l'adjoint de u .

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
 Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
 - i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
 - ii. $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
 - iii. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Exo
2

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.

2. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.

3. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \forall B \in S_n^+(\mathbb{R}), AB = BA \implies A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Exo
3

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de \mathbb{R}^3 sur P parallèlement à D .
 Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
 Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exo
4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On pose : $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A .

1. Prouver que \langle , \rangle est un produit scalaire sur E .
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E .
 Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
 On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .
 On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
 - (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
 - (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E .
 Déterminer F^\perp .

Exo 5 Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(. | .)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exo 6 On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$, où $\text{tr}(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A' .

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de \mathcal{F}^\perp .
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .
4. Calculer la distance de J à \mathcal{F} .

Exo 7 Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Démontrer que $(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exo 8 Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Démontrer que $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$.

2. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

On pose : $\forall (f, g) \in E^2, (f | g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exo 9 Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E .
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E , tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
 - (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2 (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
 - (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi \circ , est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Exo 10 Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E .
Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
 - (a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
 - (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exo 11 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.
On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$.
Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

