Feuille d'Exercices

تَمَوُّنِي مُولَاي اسْمَاعِيل

Espaces préhilbertiens réels

Partie 4 : Les Type Concours

Exo 1 **Hyperplan des espaces euclidiens**

Soit E un espace euclidien de dimension n. On rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. On note G l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire des formes linéaires).

1. Soit $a \neq 0_E$. Démontrer que $H_a = \{x \in E;\ \langle a, x\rangle = 0\}$ est un hyperplan de E.
2. Soit H un hyperplan de E. Démontrer qu'il existe $a \in E$, $a \neq 0$, tel que $H = H_a$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \neq 0_E$ pour que $H_a = H_b$.
4. Pour $a \in E$, on note $\varphi_a(x) = \langle a, x\rangle$, de sorte que $\varphi_a \in G$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_a = \varphi_b$.
5. En déduire que l'application de E dans G définie par $a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
6. Application : démontrer qu'il existe un unique polynôme $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\int_0^1 H_n(t)P(t)dt = 5P''(7) - 3P'(2) + 2P(\pi)$.

Exo 2 **Similitudes**

Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.

1. Question préliminaire : soient $u, v \in E$ tels que $u + v \perp u - v$. Démontrer que $\|u\| = \|v\|$.
2. Démontrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \lambda^2\langle x, y\rangle$.
3. On souhaite prouver que f est une similitude si et seulement si f est non-nulle et conserve l'orthogonalité : pour tout couple $(x, y) \in E$, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$.
3.1. Prouver le sens direct.
3.2. Réciproquement, on suppose que f est non-nulle et préserve l'orthogonalité. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Démontrer que, pour tout couple (i, j), $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
3.3. Conclure.

Exo 3 **Méthode des moindres carrés**

Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|;\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

2. Montrer que X_0 est l'unique solution de $A^TAX = A^TB$.

3. Application : déterminer

$$\inf\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exo 4

Déterminants de Gram

Soit E un espace préhilbertien. Pour $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E, on appelle matrice de Gram la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $(\langle x_i, x_j\rangle)_{i,j}$. On appelle déterminant de Gram des vecteurs $x_1, \dots, x_p$, et on note $G(x_1, \dots, x_p)$, le déterminant de cette matrice.

1. Démontrer que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre si et seulement si $G(x_1, \dots, x_p) \neq 0$.
2. On suppose désormais que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre, et on note $F = \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_p)$. Soit également $x \in E$. Démontrer que

$$d(x,F)^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, \dots, x_p)}.$$

Exo 5

1) Soient E et F deux espaces préhilbertiens réels, et $f : E \to F$ une application telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Montrer que f est linéaire.

2) Soit E un espace préhilbertien réel et $f, g : E \to E$ deux applications telles que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x \,|\, f(y)\rangle = \langle g(x) \,|\, y\rangle.$$

Montrer que f et g sont linéaires.

Exo 6

Soit a un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme :

$$f_\alpha : x \mapsto x + \alpha \langle a \,|\, x\rangle\, a.$$

a) Préciser la composée $f_\alpha \circ f_\beta$. Quelles sont les f_α bijectives ?

b) Déterminer les éléments propres de f_α.

Exo 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer d'une part les espaces : $\mathrm{Ker}\, A$ et $\mathrm{Ker}(A^\top A)$ et d'autre part les espaces : $\mathrm{Im}\, A$ et $\mathrm{Im}(AA^\top)$.

. Établir $\mathrm{rg}({}^t\!AA) = \mathrm{rg}\, A$.

Exo 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\| \leqslant \|X\|$$

où $\|\,.\,\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Établir :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left\|A^\top X\right\| \leqslant \|X\|.$$

b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $AX = X$ alors $A^\top X = X$.

c) Établir :

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n).$$

Exo 9

On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour $f \in E$, on note F la primitive de f qui s'annule en 0 $\forall x \in [0\,;1], F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

et on considère l'endomorphisme v de E déterminé par $v(f) = F$.

(a) Déterminer un endomorphisme v^* vérifiant

$$\forall (f,g) \in E^2, \langle v(f), g\rangle = \langle f, v^*(g)\rangle.$$

(b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $v^* \circ v$.

Exo 10

E désigne un espace euclidien de dimension n.
Soit $f : E \to E$ une application non nécéssairement linéaire.

1) **On suppose que f conserve le produit scalaire.**
Démontrer que f est linéaire.
2) **On suppose que f conserve les distances.**
Démontrer que $f = f(0_E) + g$, avec $g \in \mathcal{O}(E)$.

Exo 11

Soit $\vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose pour $\vec{x} \in E$: $f(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda(\vec{x} \mid \vec{v})\vec{v}$.
Déterminer λ pour que $f \in \mathcal{O}(E)$. Reconnaitre alors f.

Exo 12

. ***Quotients de Rayleigh*** .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, on se propose d'étudier les extremum du quotient de Rayleigh $R_f(x) = \dfrac{(f(\vec{x}) \mid \vec{x})}{\|\vec{x}\|}$ où $x \neq 0_E$. Soit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de f.

1) **Montrer que : $\forall\ \vec{x} \in E,\ \lambda_1\|\vec{x}\|^2 \leq (f(\vec{x}) \mid \vec{x}) \leq \lambda_n\|\vec{x}\|^2$.**
2) **Montrer que si l'une de ces deux ingalités est une égalité pour un vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$, alors $\vec{x}$ est vecteur propre de f.**
3) **Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de E telle que pour tout i : $(f(\vec{e}_i) \mid \vec{e}_i) = \lambda_i$.**
Montrer que : $\forall\ i,\ f(\vec{e}_i) = \lambda_i\vec{e}_i$.
4) **En déduire que le quotient de Rayleigh de f atteint ses extremums, préciser ces extremums et en quels vecteurs ils sont atteints.**

Exo 13

Théorème de Courant-Fisher
Soit E un espace vectoriel euclidien.

1) **Soit $v \in S(E)$, (i.e : auto-adjoint) tel que $\left(\overrightarrow{v(x)}|\vec{x}\right) = 0$ pour tout x. Montrer que $v = 0$.**
2) **Soient $u_1, \ldots, u_p \in S(E)$. On suppose que $rg(u_1) + \cdots + rg(u_p) = n$, et que $\forall x \in E, \left(\overrightarrow{u_1(x)}|\vec{x}\right) + \cdots + \left(\overrightarrow{u_p(x)}|\vec{x}\right) = (\vec{x}\,|\,\vec{x})$.**
   a) **Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = Id_E$.**
   b) **Montrer que $E = Im(u_1) \oplus \cdots \oplus Im(u_p)$.**
   c) **Montrer que pour tout i, u_i est la projection orthogonale sur $Im(u_i)$.**

Exo 14 Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par les expressions analytiques suivantes dans la base canonique :

1) $\begin{cases} 3x' = 2x + 2y + z \\ 3y' = -2x + y + 2z \\ 3z' = x - 2y + 2z \end{cases}$

Réponse : rotation autour de $(1, 0, 1)$ d'angle $-\arccos(1/3)$.

2) $\begin{cases} 9x' = 8x + y - 4z \\ 9y' = -4x + 4y - 7z \\ 9z' = x + 8y + 4z \end{cases}$

Réponse : rotation autour de $(-3, 1, 1)$ d'angle $-\arccos(7/18)$.

3) $\begin{cases} 3x' = -2x + 2y - z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = -x - 2y - 2z \end{cases}$

Réponse : demi-tour autour de $(-1, -2, 1)$.

4) $\begin{cases} 4x' = -2x - y\sqrt{6} + z\sqrt{6} \\ 4y' = x\sqrt{6} + y + 3z \\ 4z' = -x\sqrt{6} + 3y + z \end{cases}$

Réponse : rotation autour de $(0, 1, 1)$ d'angle $2\pi/3$.

5) $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} - \dfrac{z}{\sqrt{6}} \\ y' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{2z}{\sqrt{6}} \\ z' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{y}{\sqrt{2}} - \dfrac{z}{\sqrt{6}} \end{cases}$

Réponse : rotation autour de $(-2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{3})$ d'angle $\arccos(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{6}})$.

Exo 15 . *Endomorphismes normaux.*

Soit E un espace vectoriel hermitien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et u^* commutent.

1) Soit u normal, montrer que si F est un sous-espace propre de u alors $F^\perp$ est stable par u.
   En déduire que u est diagonalisable dans base orthonormale.
   La réciproque est-elle vraie ?
2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'quivalence entre les propriétés suivantes :
   (1) u est normal.
   (2) $\forall\, x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
   (3) Tout sous-espace vectoriel stable par u est stable par u^*.
   (4) Si un sous-espace vectoriel F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.
   (5) Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.
3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 = -\mathrm{id}$. Montrer que f est orthogonal.
4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que

$$AA^* = A^*A \iff \mathrm{tr}(AA^*) = |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2.$$

Exo 16 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

Fin
À la prochaine