Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُّونِي مُولَاِي اسْمَاعِيل

Feuille d'exercices: *Espaces vectoriels normés*

Blague du jour

• Qu'est-ce qui est jaune, normé et complet ?
Réponse : Un espace de Bananach.

• Qu'est-ce qui est jaune, normé, complet et meilleur avec de la chantilly ?
Réponse : Un Bananach Split.

Mathématicen du jour — *Banach*

Stefan Banach (1892-1945) est un mathématicien polonais. Il est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Il est à l'origine, avec Alfred Tarski, du Paradoxe de Banach-Tarski qui par la simplicité apparente de son énoncé est étrange dans sa conclusion. Ses autres travaux touchent à la théorie de la mesure de l'intégration, de la théorie des ensembles et des séries orthogonales.

Exercice 1 .

$N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$ est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 .

On définit sur $\mathbb{R}^2$ les 3 applications suivantes :

$$N_1((x, y)) = |x| + |y|, \ N_2((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}, \ N_\infty((x, y)) = \max(|x|, |y|).$$

1) Prouver que N_1, N_2, N_3 définissent 3 normes sur $\mathbb{R}^2$.
2) Prouver que l'on a : $\forall \alpha \in \mathbb{R}^2, \ N_\infty(\alpha) \leq N_2(\alpha) \leq N_1(\alpha) \leq 2N_\infty(\alpha)$.
3) N_1, N_2 et N_3 sont-elles équivalentes ?
4) Dessiner les boules unités fermées associées à ces normes.

Exercice 3 .

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour P élément de E, on pose :

$$\|P\| = |P(0)| + |P(1)| + |P(2)| + |P(3)|$$

1) Démontrer que $\|.\|$ est une norme.
2) Soit φ l'application de E dans E définie par : $\varphi(P)(X) = P(X + 2)$. Vérifier que φ est linéaire, continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 4 .

1) **Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dense dans cet espace.**
   Indication : Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $A + \operatorname{diag}\left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{p}{n}\right)$ soit à racines simples.
2) **Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré p. Montrer que les racines de P sont toutes dans le disque fermé D de centre 0 et de rayon $R = \max\{1, pM\}$, avec $M = \max_{0 \le i \le p-1} |a_i|$.**
3) **On se propose de montrer dans cette question que l'ensemble des polynômes de degré p unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}_p[X]$.**
   Soit $P_n = X^p + a_{p-1}^{(n)} X^{p-1} + \cdots + a_1^{(n)} X + a_0^{(n)}$ une suite de polynômes unitaires de degré p scindés sur $\mathbb{R}$ qui vers un certain polynôme $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$.
   a) **Montrer que : $\lim_{\infty} a_i^{(n)} = a_i$ pour tout $i \in [\![0, p]\!]$.**
   b) **Dire pourquoi $a_p = 1$.**
   c) **Pour tout entier naturel n, notons $Z_n = (z_1^{(n)}, \cdots, z_p^{(n)})$ une liste des zéros (supposés réels) du polynôme P_n pris dans un ordre arbitraire, mais bien sûr comptés avec leurs multiplicités.**
      Montrer que la suite (Z_n) admet une suite extraite $(Z_{\varphi(n)})$ convergente, de limite $Z = (z_1, \cdots, z_p)$.
   d) **En déduire que $\prod_{i=1}^{p} (X - z_i)$.**
   e) **Conclure**
4) **Montrer que dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, de l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans celui des matrices trigonalisables.**

Exercice 5 .

Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$.

1) **Prouver que N est une norme. Dessiner sa boule unité.**
2) **Déterminer le plus petit nombre $p > 0$ tel que $N \le p\|.\|_2$ et le plus grand nombre q tel que $q\|.\|_2 \le N$.**

Exercice 6 .

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f \in E$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\},\ \ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Vérifier que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont deux normes sur E. Montrer que

$$\forall f \in E,\ \|f\|_1 \le \|f\|_\infty.$$

En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 7 . **Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $(x, y) \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} \dfrac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}}$.**

1) **Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.**
2) **La comparer à la norme euclidienne. Expliquer.**

Exercice 8 .
Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies, continues et dérivables sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0) = 0$. On définit sur cet espace les deux normes suivantes :

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f'\|_\infty.$$

1) **Montrer que $N_1(f) \leq N_2(f)$. En déduire que l'application identique de (E, N_2) vers (E, N_1) est continue.**
2) **A l'aide de la fonction $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$, montrer que l'application identique de (E, N_1) vers (E, N_2) n'est pas continue.**

Exercice 9 .
On définit $E = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0\}$. Soient $\|.\|$ et N les deux applications définies sur E par

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ et } N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$$

1) **Montrer que ces deux applications sont des normes sur E.**
2) **Sont-elles équivalentes ?**

Exercice 10 .
Soit E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et N_1, N_2 N_3 les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies par : $N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, $N_2(f) = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$, $N_3(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$.
Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E et les comparer.

Exercice 11 .
On définit sur l'espace vectoriel $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ les applications γ_1 et γ_2 par
$\gamma_1(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ **et** $\gamma_2(f) = \int\limits_0^1 e^x |f(x)|\, dx$

1) **Montrer que γ_1 et γ_2 sont des normes sur E.**
2) **Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ la suite de fonctions définie par $\begin{cases} f_n(x) = 1 - nx \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ f_n(x) = 0 \text{ si } \frac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$.**
   Etudier la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ dans (E, γ_1) dans (E, γ_2). Conclusion ?

Exercice 12 . **On définit une application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant**

$$N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}| \text{ si } A = (a_{i,j}).$$

Vérifier que l'on définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que

$$N(AB) \leq N(A)N(B) \text{ pour toutes matrices } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 13 .
Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ **et** $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) **Que peut-on dire de la suite $6^n A^n$? (on commencera par calculer $P^{-1}AP$).**
2) **Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{6^n}{n} A^n$.**

Exercice 14 .

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur E trois normes par, si $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$: $N_1(P) = \sum_{i=0}^{p} |a_i|$, $N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2\right)^{1/2}$, $N_\infty(P) = \max_i |a_i|$.

1) **Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$.**
2) **Sont-elles équivalentes deux à deux ?**

Exercice 15 .

$E = \mathbb{R}[X]$ **et si** $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, **on pose** $\| P \| = \sum_{k=0}^{+\infty} | a_k |$

1) **Montrer que $(E, \|\|)$ est un evn.**
2) **On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que la suite P_n est de Cauchy dans E.**
3) **Converge-t-elle dans E ?**

Exercice 16 .

$E = \mathbb{R}[X]$ **et si** $P \in \mathbb{R}[X]$, **on pose** $\| P \| = \sup_{t\in[0,1]} | P(t) - P'(t) |$

1) **Montrer que $(E, \|\|)$ est un evn.**
2) **On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que la suite P est de Cauchy dans E.**
3) **Converge-t-elle dans E ?**

Exercice 17 .

Dire si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \le 1\}, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\},$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}, \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\},$$
$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - \exp(\sin y) \le 12\right\}, \qquad H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \ln|x^2+1| > 0\}.$$

Exercice 18 .

On définit un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ en posant

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}.$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A.

Exercice 19 .

Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$. Prouver que $\overline{C}$ est aussi convexe.

Exercice 20 .

Soit E un espace vectoriel normé, et V un sous-espace vectoriel de E.

1) **Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.**
2) **Montrer que si $\overset{\circ}{V} \neq \varnothing$, alors $V = E$.**

Exercice 21 .

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est fermé

Exercice 22 .

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon

Exercice 23 .

Donner un exemple d'ensemble A tels que : A, l'adhérence de A, l'intérieur de A, l'adhérence de l'intérieur de A et l'intérieur de l'adhérence de A sont des ensembles distincts deux à deux.

Exercice 24 .

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On rappelle que la frontière de A est l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$. Montrer que :

1) $Fr(A) = \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ **et** $B(x, \varepsilon) \cap C_E^A \neq \emptyset\}$
2) $Fr(A) = Fr(C_E^A)$
3) **A est fermé si et seulement si $Fr(A)$ est inclus dans A.**
4) **A est ouvert si et seulement si $Fr(A) \cap A = \emptyset$.**

Exercice 25 .

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide et bornée de E.
On définit $diam(A) = \sup\{\|y - x\|, x, y \in A\}$.

1) **Montrer que si A est bornée, alors $\overline{A}$ et $Fr(A)$ sont bornés.**
2) **Comparer $diam(A)$, $diam(\overset{\circ}{A})$ et $diam(\overline{A})$ lorsque $\overset{\circ}{A}$ est non vide.**
3) a) **Montrer que $diam(Fr(A)) \leq diam(A)$.**
   b) **Soit x un élément de A, et u un élément de E avec $u \neq 0$. On considère l'ensemble $X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe.**
   c) **En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $Fr(A)$.**
   d) **En déduire que $diam(Fr(A)) = diam(A)$.**

Exercice 26 .

Soit E un espace vectoriel normé. On munit $\mathcal{L}_c(E)$ de la norme des applications linéaires. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f. Montrer que $|\lambda| \leq \|f\|$.

Exercice 27 .

Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 28 .

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 29 .

Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales $O_n(\mathbb{R})$ (celles qui vérifient ${}^tMM = I_n$) est un compact.

Exercice 30 .

Soient A et B deux matrices réelles d'ordre n.

1) **On suppose A inversible. Montrer que $P_{AB} = P_{BA}$, où P_M est le polynôme caractéristique de M.**
2) **Montrer que ce résultat subsiste si on se suppose plus A inversible.**

Exercice 31 .
Soit E un evn, et A et B deux parties de E. On définit :

$$A+B=\{z\in E;\ \exists x\in A,\ \exists y\in B,\ z=x+y\}.$$

Montrer que si A est ouvert, alors $A+B$ est ouvert.

Exercice 32 .
Soit F un fermé, et C un compact de $\mathbb{R}^n$. On note $G=F+C=\{x+y;\ x\in F \text{ et } y\in C\}$. Montrer que G est fermé. Que dire si C est supposé simplement fermé ?

Exercice 33 .
Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé de dimension finie, et K un compact de E tel que $0\in\overset{\circ}{K}$. On note H l'ensemble des $u\in\mathcal{L}(E)$ tels que $u(K)\subset K$. Montrer que pour tout $u\in H$, on a $|\det u|\leq 1$

Exercice 34 .
Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$\begin{array}{ll} A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^4=1\} & B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^5=2\} \\ C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+xy+y^2\leq 1\} & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+8xy+y^2\leq 1\} \\ E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y^2=x(1-2x)\}. & \end{array}$$

Exercice 35 .
Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (x_n) une suite convergente de E et soit x sa limite. Montrer que l'ensemble : $A=\{x\}\cup\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ est compact.

Exercice 36 .
Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^d$. Pour $n\geq 1$, on pose $A_n=\{u_p;\ p\geq n\}$.

1) **Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est : $V=\bigcap_{n\geq 1}\overline{A_n}$.**
2) **En déduire que si la suite est bornée, V (l'ensemble des valeurs d'adhérence) est compact.**

Exercice 37 .
Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et (x_n) une suite de A n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que (x_n) converge.

Exercice 38 .
Soit $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\|\to\infty}\|f(x)\|=+\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 39 .
Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\forall M>0,\ \exists R>0$ **tel que** $\|x\|>R\implies |f(x)|>M$.
2) **Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.**
3) **Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.**

Exercice 40 .
Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que (x_n) est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

Exercice 41 .

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, et A une partie non vide de E. On définit la *distance* d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0, A)$, par la formule

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1) **Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.**
2) **Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$.)**
3) **Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).**
4) **En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que**

$$\|a - b\| \geq \delta \qquad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5) **Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.**

Exercice 42 .

Soit E un espace vectoriel normé.
Montrer que (E est complet)$\Leftrightarrow$ (toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E vérifiant $\forall\ n \in \mathbb{N},\quad ||u_{n+1} - u_n|| \leq \frac{1}{2^n}$ est convergente).

Exercice 43 .

Soit X un ensemble. On note $B(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$. On munit $B(X, \mathbb{R})$ en posant $\forall f \in B(X, \mathbb{R}),\ \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.
Muni de cette norme, montrer que $B(X, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Exercice 44 .

Soit E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, et $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme des applications linéaires : $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.
Montrer que $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Banach.

Exercice 45 .

On note ℓ^1 l'espace vectoriel des suites $x = (x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ réelles vérifiant :

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)| < +\infty.$$

On admettra que l'on définit ainsi une norme sur ℓ^1. On cherche à prouver que ℓ^1 est un espace de Banach. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de ℓ^1. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, si $n, l \geq N(\varepsilon)$, alors : $\|x_n - x_l\| \leq \varepsilon$.

1) **Montrer qu'on a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tous $n, l \geq N(\varepsilon)$ $|x_n(k) - x_l(k)| \leq \varepsilon$.**
2) **Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n(k)$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$.**
3) **Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k\geq K} |x_{N(\varepsilon)}(k)| \leq \varepsilon$.**
4) **Montrer que pour tout $L \geq K$, on a : $\sum_{K\leq k\leq L} |x(k)| \leq 2\varepsilon$.**
5) **En déduire que l'on a $x \in \ell^1$, et que : $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$.**

Exercice 46 .

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit une norme sur E en posant

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt.$$

On va montrer que E muni de cette norme n'est pas complet. Pour cela, on définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \textbf{si } -1 \le t \le -\frac{1}{n} \\ nt & \textbf{si } -\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n} \\ 1 & \textbf{si } \quad \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

1) **Vérifier que $f_n \in E$ pour tout $n \geq 1$.**
2) **Montrer que**

$$\|f_n - f_p\| \le \sup(\frac{2}{n}, \frac{2}{p})$$

   et en déduire que (f_n) est de Cauchy.
3) **Supposons qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que (f_n) converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Montrer qu'alors on a**

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0 \qquad \textbf{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0$$

   pour tout $0 < \alpha < 1$.
4) **Montrer qu'on a**

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1|\, dt = 0 \qquad \textbf{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - 1|\, dt = 0$$

   pour tout $0 < \alpha < 1$. En déduire que

$$f(t) = -1, \quad \forall t \in [-1, 0[$$
$$f(t) = 1, \quad \forall t \in]0, 1].$$

   Conclure.

Exercice 47 .

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle qu'une application g de E dans E est dite *contractante* s'il existe $K \in]0,1[$ tel que

$$\|g(x) - g(y)\| \le K\|x - y\| \qquad \forall x, y \in E.$$

1) **Montrer que toute application contractante admet un unique point fixe.**
   Soit f une application de E dans E telle qu'il existe un entier n tel que f^n soit contractante. On note x_0 le point fixe de f^n.
2) **Montrer que tout point fixe de f est un point fixe de f^n.**
3) **Montrer que si x est un point fixe de f^n, il en est de même pour $f(x)$.**
4) **En déduire que x_0 est l'unique point fixe de f.**

Exercice 48 .
Une fonction f définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est dite *localement lipschitzienne* si, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage V_x de x et une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (y,z) \in A \cap V_x,\ \|f(y) - f(z)\| \leq C\|y - z\|.$$

Montrer qu'une fonction localement lipschitzienne sur une partie compacte K de $\mathbb{R}^n$ est en fait lipschitzienne

Exercice 49 .
Soit E une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \to E$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1) **Montrer que f admet un unique point fixe (que l'on notera α).**
2) **Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement E complet ?**

Exercice 50 .
$\mathbb{R}^2$ est muni d'une norme quelconque. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\exists \alpha \in]0;\frac{1}{2}[,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \alpha(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)$$

1) **Montrer que f admet au plus un point fixe.**
2) **On considère la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}^2$.**
   a) **Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ \|u_{n+2} - u_{n+1}\| \leqslant \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\|u_{n+1} - u_n\|$.**
   b) **Montrer que la suite u est de Cauchy. Conclure.**

Exercice 51 .
Montrer que le système $\begin{cases} x_1 &= \dfrac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 &= \dfrac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$ admet une solution unique $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 52 .
Soit X et F deux parties d'un espace vectoriel normé, F étant une partie complète. On considère une application $F : X \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto F(\lambda, x)$ continue, et k-contractante en la seconde variable, c'est-à-dire qu'elle existe $k \in]0,1[$ tel que :

$$\forall \lambda \in X,\ \forall (x,y) \in E^2,\ \|F(\lambda, x) - F(\lambda, y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Montrer que, pour tout $\lambda \in X$, il existe un unique $x_\lambda \in E$ tel que $F(\lambda, x_\lambda) = x_\lambda$. Montrer ensuite que l'application $X \to E$, $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.

*Exercice 53 . **Théorème des fermés emboîtés***
Soit E un espace vectoriel normé complet. Montrer que l'intersection d'une suite décroissante (F_n) de parties fermées non vides et bornées de E dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non vide.

Exercice 54 . Théorème de Baire

Soit E une partie complète d'un espace vectoriel normé.

1) **Montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E. Attention, ce n'est pas nécessairement un ouvert !**

2) **Que dire de la réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide ?**

Exercice 55 .

On note E l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit sur E les deux normes suivantes :

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \quad \textbf{et} \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [-1,1]\}.$$

1) **Montrer que les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.**

2) **Montrer que l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_\infty)$ est complet.**

3) **Le but de cette question est de démontrer que $(E, \|.\|_2)$ n'est pas complet. Pour cela, on définit la suite de fonctions (f_n) en posant :**

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \textbf{si} \ -1 \le t \le -\frac{1}{n} \\ nt & \textbf{si} \ -\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n} \\ 1 & \textbf{si} \quad \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

dont on va montrer que c'est une suite de Cauchy de $(E, \|.\|_2)$ sans que ce soit une suite convergente.

a) **Faire un dessin et vérifier que $f_n \in E$.**

b) **Montrer que pour $1 \le n \le p$, on a :**

$$\|f_n - f_p\|_2 \le \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

En déduire que la suite (f_n) est de Cauchy dans $(E, \|.\|_2)$.

c) **Supposons que la suite (f_n) converge vers f dans $(E, \|.\|_2)$. Montrer que pour tout $t \in]0,1]$, on a $f(t) = 1$. Que doit valoir f sur $[-1,0[$? Conclure.**

4) **L'application linéaire $T : E \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(0)$ est elle continue si on munit E de $\|.\|_\infty$? si on munit E de $\|.\|_2$?**

Fin
à la prochaine