Préparation aux Oraux : Session 2026

Extraits CCINP

Planche 1

Énoncé exercice 6 — 8 points

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n!}{n^n}$?

12 points

Soit $(E,(.\,,.))$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire. Soit f une isométrie et on pose $g=f-\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\ g=(\mathrm{Ker}\ g)^{\perp}$
2. On pose désormais $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f^k$. Soit $y\in\mathrm{Im}\ g$, montrer que $\lim_{n\to+\infty}\|u_n(y)\|=0$.
3. On note $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\\ \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$. A est-elle diagonalisable ? Donner une base or

sable ? Donner une base orthonormée de $\ker(A-I_3)$. Donner la limite de

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(X+AX+A^2X+\cdots+A^{n-1}X\right)$$

Planche 2

Énoncé exercice 103 — 8 points

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in(]0,+\infty[)^2$.
   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de X_1+X_2.

   (b) En déduire l'espérance et la variance de X_1+X_2.

2. Soit $p\in\,]0,1]$. Soit $\lambda\in\,]0,+\infty[$.
   Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et que, pour tout $m\in\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y=m)$ est une loi binomiale de paramètre (m,p).
   Déterminer la loi de X.

12 points

Soit u un endormorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ tel que $u^3=u$, $\mathrm{Tr}\,u=0$ et $\mathrm{Tr}\,u^2=2n$.

On définit : $\mathcal{C}(u)=\{v\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})\ /\ \ u\circ v=v\circ u\}$.

1) u est-il diagonalisable ?

2) Déterminer les valeurs propres de u et les dimensions des sous espaces propres associés.
Donner la matrice de u dans une base adaptée à sa diagonalisation.

3) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(u)$.

4) Pour quelles valeurs de n a-t-on $\mathcal{C}(u)=\mathbb{R}[u]$?

Planche 3

Exercice 1 **8 points**

Soit $(a,b,p)\in\mathbb{Z}^3$.

1. Prouver que : si $p\wedge a=1$ et $p\wedge b=1$, alors $p\wedge(ab)=1$.
2. Soit p un nombre premier.
   a. Prouver que $\forall k\in[\![1,p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
   b. Prouver que: $\forall n\in\mathbb{N}$, $n^p\equiv n \mod p$.
   Indication : procéder par récurrence.
   c. En déduire, pour tout entier naturel n, que : $p \text{ ne divise pas } n \Longrightarrow n^{p-1}\equiv 1 \mod p$.

Il s'agit de l'exercice 86 de la banque.

Exercice 2 **12 points**

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq1}\frac{4^n(2n)!}{(2n+1)!}x^n$ et en déduire celui de $\sum\limits_{n\geq1}\frac{4^n(2n)!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.
   On note S la somme de cette dernière série entière.
2. Justifier que S est dérivable sur son disque ouvert de convergence. Calculer explicitement $S'(x)$, pour x convenable, puis en déduire S.

Planche 4

Exercice 1 **8 points**

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose: $\forall\ f\in E$, $N_\infty(f)=\sup\limits_{x\in[0;1]}|f(x)|$ et $N_1(f)=\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t$.

1.
   a. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   b. Démontrer qu'il existe $k>0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f)\leq kN_\infty(f)$.
   c. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Il s'agit de l'exercice 37 de la banque.

Exercice 2 **12 points**

Soit $a\in\mathbb{R}$. On définit $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&1+a\end{pmatrix}$$

1. Déterminer les conditions sur a telles que M soit inversible.
2. Déterminer les conditions sur a telles que M soit une matrice de projection.
   On fait cette hypothèse dans la suite de cette question.
   a. Déterminer $\ker(M)$ et $\mathrm{Im}(M)$.
   b. Est-ce que le projecteur $p\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à M est un projecteur orthogonal ?
   c. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Discuter, selon les valeurs de $a\in\mathbb{R}$, de la diagonalisabilité de M.