

## Préparation aux Oraux : Session 2026

# Extraits CCINP

### Planche 1

#### Énoncé exercice 109 8 points

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $n$  boules blanches numérotées de 1 à  $n$  et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note  $Y$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Déterminer la loi de  $Y$ .

### 12 points

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u \circ u^* = u^* \circ u$ .

1.
  - a. Montrer que, pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  valeur propre de  $u$  et  $x \in E_\lambda(u)$ , on a  $\|u^*(x)\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$ .
  - b. Montrer que  $u$  et  $u^*$  ont les mêmes valeurs propres et les mêmes sous-espaces propres.
2. Montrer que les sous-espaces propres de  $u$  sont orthogonaux entre-eux.
3. On suppose que  $u$  est diagonalisable. Montrer que  $u$  est symétrique.

### Planche 2

#### Énoncé exercice 103 8 points

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

1. (a) Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in ]0, +\infty[^2$ .  
Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .  
On suppose que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .  
Déterminer la loi de  $X_1 + X_2$ .
- (b) En déduire l'espérance et la variance de  $X_1 + X_2$ .
2. Soit  $p \in ]0, 1]$ . Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ .  
Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .  
On suppose que  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .  
On suppose que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $(Y = m)$  est une loi binomiale de paramètre  $(m, p)$ .  
Déterminer la loi de  $X$ .

### 12 points

Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  tel que  $u^3 = u$ ,  $\text{Tr } u = 0$  et  $\text{Tr } u^2 = 2n$ .

On définit :  $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1}) / u \circ v = v \circ u\}$ .

- 1)  $u$  est-il diagonalisable ?
- 2) Déterminer les valeurs propres de  $u$  et les dimensions des sous-espaces propres associés.  
Donner la matrice de  $u$  dans une base adaptée à sa diagonalisation.
- 3) Déterminer la dimension de  $\mathcal{C}(u)$ .
- 4) Pour quelles valeurs de  $n$  a-t-on  $\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]$  ?

## Planche 3

### Énoncé exercice 111

On admet, dans cet exercice, que :  $\forall q \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-1, 1[, \sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$  converge et que  $\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$ .

Soit  $p \in ]0, 1[$ .

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On suppose que la loi de probabilité du couple  $(X, Y)$  est donnée par :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de  $Y$ .  
(b) Prouver que  $1 + Y$  suit une loi géométrique.  
(c) Déterminer l'espérance de  $Y$ .
3. Déterminer la loi de  $X$ .

### 12 points

$$(E): t^2 y'' + 4ty' + (2 - t^2)y - 1 = 0$$

$$(H): t^2 y'' + 4ty' + (2 - t^2)y = 0$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$ .
2. Montrer que  $g: t \mapsto -\frac{1}{t^2}$  est solution de  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$ .  
On admet que  $h: t \mapsto \frac{\text{sh}(t)}{t^2}$  est solution de  $(H)$  sur  $]0, +\infty[$ .
3. Déterminer les solutions de  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$ .

## Planche 4

### Énoncé exercice 97 8 points

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$  dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, P((X, Y) = (j, k)) = \frac{\binom{j+k}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e^j j! k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .  
Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que  $E[2^{X+Y}]$  existe et la calculer.

### 12 points

On considère l'intégrale suivante :  $I = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$

1) Montrer que  $I$  est bien définie.

2) Estimer  $I$  à  $10^{-2}$  près (on pourra développer  $I$  sous forme d'une série entière).