Préparation aux Oraux : Session 2026

Extraits CCINP

Planche 1

Énoncé exercice 82 **8 points**

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

12 points

Exercice 2 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x \mathrm{d}t$.

1. Justifier que f est definie en $x = 1$ et calculer $f(1)$.
2. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
3. Justifier que f est continue et décroissante sur D.
4. Pour $x \in D$ calculer $(x+1)f(x)f(x+1)$.

Planche 2

Énoncé exercice 74 **8 points**

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

12 points

Exercice 2 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans N. On pose $S = X + Y$.
X et Y suivent des lois de Poisson de paramètre respectivement a et b. On pose $\{X_n = k\} = \{X = k\} \mid \{S = n\}$ et $\{Y_n = k\} = \{Y = k\} \mid \{S = n\}$ pour tout k dans N.

1. Quelle est la loi de S ? Montrez-le en utilisant les fonctions génératrices.
2. Montrez que X_n suit une loi binomiale dont vous déterminerez les paramètres.
3. Quelle est la loi de Y_n ?
4. X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

Planche 3

Exercice Banque n°100 : **8 points**

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par :

$$R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

2. Calculer λ.

3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.

4. X admet-elle une variance ? Justifier.

12 points

Exercice :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et p un projecteur.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\det(\mathrm{id}_E + \lambda p)$.

Soit $V = (a_1 \dots a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Soit $B = V^T V$.

2. Calculer $\mathrm{rg}(B)$.

3. Montrer que B est diagonalisable, trouver ses valeurs propres et la dimension de ses sous-espaces propres associés.