PRÉPAS ELBILIA

GROUPE ELBILIA · LÉON L'AFRICAIN

Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

تمّوني مولاي اسماعيل

Concours Blanc N° 1

Réduction & Préhilbertiens

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 : Réduction (e3a)

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice identité de E_n sera notée I_n.

Soit $A \in E_n$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note A_j la j-ième colonne de la matrice A.

Soit u l'application qui à toute matrice A de E_n associe la matrice B dont les colonnes B_j sont :

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \quad B_j = S - A_j = \sum_{k=1, k \neq j}^{n} A_k \quad \text{où} \quad S = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

1. Dans cette question $n = 2$ et E_2 est muni de la base : $\mathscr{B} = (K_1, K_2, K_3, K_4)$

où $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1 Vérifier que u est un endomorphisme de E_2.

1.2 Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$. Démontrer que u est un automorphisme de E_2.

1.3 Reconnaître la nature géométrique de l'automorphisme u en précisant ses éléments caractéristiques.

2. Exprimer $\det(u(A))$ en fonction de $\det(A)$ dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

<u>On revient au cas général</u> et on admettra que u est un endomorphisme de E_n.

3. Montrer à l'aide d'opérations sur les colonnes et en utilisant S que l'on a :

$$\det(u(A)) = (-1)^{n-1}\,(n-1)\,\det(A)$$

4.

4.1 Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de l'endomorphisme u.

4.2 En déduire les éléments propres de l'endomorphisme u. Est-il diagonalisable ?

5. Soient J_n la matrice de E_n dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $U_n = J_n - I_n$.

5.1 Déterminer les colonnes du produit matriciel AU_n à l'aide de celles de A.

5.2 Retrouver alors le résultat de la question **4.1**.

Exercice 2 : Préhilbertiens (e3a)

E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni du produit scalaire $(x, y) \longmapsto (x|y)$. On rappelle qu'un automorphisme de E est un endomorphisme **bijectif** de E. On considère un automorphisme u de E qui vérifie la propriété (1) :

$$(1) \quad \forall (x, y) \in E \times E, (u(x)|y) = -(x|u(y)).$$

1) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

a) Étant donnés deux entiers i, j compris entre 1 et n, on note $a_{i,j}$ le (i, j)-ème coefficient de A. Justifier :

$$a_{i,j} = (u(e_j)|e_i).$$

b) En déduire l'égalité : ${}^tA = -A$.

2) Montrer que l'entier n est un nombre pair.
Indication : On pourra considérer le déterminant de la matrice A.

3) On appelle v l'automorphisme égal à $u \circ u$. Montrer que v est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de E.

4) Soit λ une valeur propre réelle de v, montrer que λ est strictement négative.

5) On note x un vecteur propre de l'automorphisme v associé à la valeur propre λ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $u(x)$.

a) Montrer que la dimension de F est égale à 2.

b) Montrer que F est stable par l'automorphisme u, en déduire que l'orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u. On notera u_F et $u_{F^\perp}$ les applications induites par l'automorphisme u sur les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$.

c) Soit λ une valeur propre réelle de v, on pose $a = \sqrt{-\lambda}$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}'$ soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Indication : On pourra considérer les vecteurs $e'_1 = \dfrac{1}{\| x \|}x$ *et* $e'_2 = \dfrac{1}{a \| x \|}u(x)$.

d) Montrer que l'endomorphisme $u_{F^\perp}$ est un automorphisme vérifiant la relation (1).

6) On suppose dans cette question que l'espace euclidien E est de dimension 4. Soit u un automorphisme de E vérifiant la relation (1).
Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$" de E et deux réels α et β non nuls tels que la matrice de l'automorphisme u dans cette base soit égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : Réduction (CCP)

Dans cet exercice, il est inutile de reproduire tous les calculs sur la copie.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Q1. Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable puis déterminer une matrice D diagonale réelle et une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Q2. Déterminer une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2 = A$.

Q3. Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, les 9 coefficients de la matrice A^n en utilisant la matrice de passage P.

Q4. Donner le polynôme minimal de la matrice A et en déduire, à l'aide d'une division euclidienne de polynômes, la matrice A^n comme une combinaison linéaire des matrices A et I_2.

Exercice 4 : Réduction (CNC)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1.1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A et en déduire que A possède une seule valeur propre λ à préciser.

1.2. Déterminer $\operatorname{Ker}(v - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3})$, le sous-espace propre de v associé à son unique valeur propre λ.

1.3. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

1.4. On considère l'endomorphisme $u = v - 2\, id_{\mathbb{R}^3}$ et on pose $e_1 = (1, 0, 0)$.

1.4.1. Montrer que l'endomorphisme u est nilpotent.

1.4.2. Déterminer le noyau de l'endomorphisme u^2 puis vérifier que $e_1 \notin \operatorname{Ker} u^2$.

1.4.3. Montrer que la famille $\mathscr{B} = \big(u^2(e_1), u(e_1), e_1\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice T de v dans la base $\mathscr{B}$, puis exprimer la matrice A en fonction de T.

Problème : Préhilbertiens (CCP)

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire que l'on notera $\langle \mid \rangle$ de norme associée $\| \|$.

Un endomorphisme u de E est une similitude de E lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout vecteur x de E, $\|u(x)\| = k\|x\|$. On dira que u est la similitude de rapport k.

On notera $\mathrm{Sim}(E)$, l'ensemble des similitudes de E.

$\mathrm{O}(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.

L'objectif de ce problème est de définir et de caractériser les similitudes d'un espace euclidien.

Partie I - Exemples, propriétés

Q10. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice d'une similitude u dont on précisera le rapport.

Q11. Interprétation géométrique avec la similitude u de la question précédente.
Le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
On considère les trois points $M(2, 1)$, $N(4, 1)$, $P(4, 2)$ et on définit les points M', N', P' par les relations $u(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}$, $u(\overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{ON'}$, $u(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'}$.
Représenter les triangles MNP et $M'N'P'$ et comparer leurs aires.

Q12. Démontrer que tout élément de $\mathrm{Sim}(E)$ est bijectif et établir que $\mathrm{Sim}(E)$, muni de la loi de composition, est un groupe.

Q13. Soient u un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
Démontrer que u est un automorphisme orthogonal de E, si et seulement si, ${}^tA.A = I_n$.
Caractériser par une relation matricielle une similitude de rapport k.

Q14. Exemple

Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une similitude u dont on donnera le rapport. Donner la matrice de la similitude u^{-1}.
Vérifier que, pour tout élément f de $\mathrm{O}(E)$, $u^{-1} \circ f \circ u \in \mathrm{O}(E)$.

Q15. On appelle sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$, l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| = r$. Démontrer que si u est un endomorphisme de E tel que l'image par u de toute sphère de E de centre 0 est une sphère de E de centre 0, alors u est une similitude de E.

On pourra remarquer que pour y vecteur non nul, $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1$.

Partie II - Assertions équivalentes

Q16. On rappelle qu'une homothétie vectorielle de E est une application de la forme $\alpha\, id_E$.
Démontrer que $u \in \mathrm{Sim}(E)$, si et seulement si, u est la composée d'une homothétie vectorielle non nulle de E et d'un élément de $O(E)$.

Q17. Exemple

Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de la matrice d'une homothétie vectorielle et de la matrice d'un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ dont on précisera la nature.

Q18. Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x | y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.
En déduire que u est une similitude de rapport k, si et seulement si,
$\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = k^2 \langle x | y \rangle$.

Q19. Démontrer que, si u est une similitude de rapport k, alors, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, $\langle x | y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x) | u(y) \rangle = 0$.
On dit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité.

Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité.

Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. Démontrer que :
$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\langle e_i + e_j | e_i - e_j \rangle = 0$, puis que : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$.

On note k la valeur commune prise par tous les $\|u(e_i)\|$.

Après avoir justifié que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|u(e_i)\| = k\|e_i\|$ démontrer que u est une similitude de rapport k.

Q20. Soit u une application de E dans E (non supposée linéaire) telle qu'il existe un réel $k > 0$ pour lequel : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = k^2 \langle x | y \rangle$.
Démontrer que u est un endomorphisme de E, puis que u est une similitude de E.

Le Corrigé

Exercice 1 : Réduction (e3a)

Q1.1: Soit $A \in E_2$. On a $u(A) = B$ avec $B_1 = A_2$ et $B_2 = A_1$. Soit $A' \in E_2$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$. On pose $A'' = \lambda A + \lambda' A'$, $u(A') = B'$ et $u(A'') = B''$. On a $B_1'' = (\lambda A + \lambda' A')_2 = \lambda A_2 + \lambda' A_2' = \lambda B_1 + \lambda' B_1'$ et, de même, $B_2'' = \lambda B_2 + \lambda' B_2'$ donc $B'' = \lambda B + \lambda' B'$ donc u est linéaire donc endomorphisme de E_2.

Q1.2: On a $u(K_1) = K_3$, $u(K_2) = K_4$, $u(K_3) = K_1$ et $u(K_4) = K_2$ donc $mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1.3: On remarque que $u^2(K_i) = K_i$ donc $u^2 = id_{E_2}$ et u est une symétrie. De plus, $u(K_1 + K_3) = K_1 + K_3$ et $u(K_2 + K_4) = K_2 + K_4$ donc $vect(K_1 + K_3, K_2 + K_4) \subset \ker(u - id_{E_2})$ et $u(K_1 - K_3) = -(K_1 - K_3)$ et $u(K_2 - K_4) = -(K_2 - K_4)$ donc $vect(K_1 - K_3, K_2 - K_4) \subset \ker(u + id_{E_2})$. Or $E_2 = \ker(u - id_{E_2}) \oplus \ker(u + id_{E_2})$ et ces deux sous-espaces vectoriels sont de dimension au moins 2 et la somme de leurs dimensions vaut 4 donc ils sont de dimension 2 donc $\ker(u - id_{E_2}) = vect(K_1 + K_3, K_2 + K_4)$ et $\ker(u + id_{E_2}) = vect(K_1 - K_3, K_2 - K_4)$.

Q2: Si $n = 2$, $\det(u(A)) = -\det(A)$ (interversion des colonnes). Si $n = 3$, $\det(u(A)) = |B_1, B_2, B_3| = |B_1 + B_2 + B_3, B_2, B_3|$. Or $B_1 + B_2 + B_3 = 2(A_1 + A_2 + A_3)$ donc $\det(u(A)) = 2 \times |A_1 + A_2 + A_3, B_2, B_3| = 2 \times |A_1 + A_2 + A_3, -A_2, -A_3|$ ($C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$) donc $\det(u(A)) = 2\det(A)$.

Q3: On a $\det(u(A)) = |B_1, B_2, \ldots, B_n| = |B_1 + \cdots + B_n, B_2, \ldots, B_n|$ et $B_1 + \cdots + B_n = (n-1)(A_1 + \cdots + A_n)$ donc $\det(u(A)) = (n-1)|A_1 + \cdots + A_n, B_2, \ldots, B_n| = (n-1)|A_1 + \cdots + A_n, -A_2, \ldots, -A_n|$ ($C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour $2 \leq j \leq n$) donc $\det(u(A)) = (n-1)(-1)^{n-1}\det(A)$.

Q4.1: Soit $C_j = \sum\limits_{1 \leq k \leq n, k \neq j} B_k$, la $j^{ème}$ colonne de $u(u(A))$. On a $C_j = (n-1)A_j + (n-2)\sum\limits_{1 \leq i \leq n, i \neq j} A_i$ (car A_j est présent dans tous les B_k tandis que si $i \neq j$, A_i est présent dans tous les B_k sauf B_i donc $C_j = (n-1)A_j + (n-2)B_j$. On en déduit que $u^2(A) = (n-1)u(A) + (n-2)A$. Cette relation étant vraie pour toute A, on a $u^2 - (n-2)u - (n-1)id_E = 0$ donc $P = X^2 - (n-2)X - (n-1)$ est un polynôme annulateur de u.

Q4.2: On a $P = (X+1)(X - (n-1))$ donc P admet deux racines distinctes. Le polynôme P est scindé à racines simples donc u est diagonalisable et $sp(u) \subset \{-1, n-1\}$ Le sous-espace $E_{-1}(u)$ est l'ensemble des matrices A telles que, pour tout j, $\sum\limits_{1 \leq k \leq n, k \neq j} A_k = -A_j$, c'est-à-dire telles que $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k = 0$ (il est donc de dimension $n^2 - n$: on peut prendre les $n-1$ premières colonnes quelconques et en déduire la dernière). Si une matrice A a toutes ses colonnes égales, alors $\sum\limits_{1 \leq k \leq n, k \neq j} A_k = (n-1)A_j$ donc $A \in E_{n-1}(u)$. Or l'ensemble des matrices ayant des colonnes identiques est de dimension n (on peut prendre la première colonne quelconque et en déduire les autres) donc, comme $\dim(E_{n-1}(u)) = n^2 - \dim(E_1(u)) = n$, $E_{n-1}(u)$ est l'ensemble des matrices ayant toutes leurs colonnes égales.

Q5.1: Soit $C = AU_n$. On a $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}u_{k,j}$ avec $u_{k,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } k \neq j \\ 0 \text{ si } k = j \end{cases}$ donc $c_{i,j} = \sum\limits_{1 \leq k \leq n, k \neq j} a_{i,k}$. On en déduit que $C_j = \sum\limits_{1 \leq k \leq n, k \neq j} A_k$ donc $AU_n = u(A)$.

Q5.2: On a $J_n^2 = nJ_n$ donc $U_n^2 = (J_n - I_n)^2 = J_n^2 - 2J_n + I_n = (n-2)J_n + I_n = (n-2)(J_n - I_n) + (n-1)I_n$ donc $U_n^2 = (n-2)U_n + (n-1)I_n$. Soit $A \in E_2$. On a $u^2(A) = u(AU_n) = AU_n^2 = A((n-2)U_n + (n-1)I_n) = (n-2)AU_n + (n-1)A$ donc $u^2(A) = (n-2)u(A) + (n-1)A$, ce qui permet de retrouver le polynôme annulateur de u.

Exercice 2 : Préhilbertiens (e3a)

1. (a) D'un côté la j-ème colonne de la matrice A est $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(e_j))$ colonne des coefficients de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi $a_{i,j}$ qui le coefficient de la matrice A situé à la i-éme ligne et la j-ème colonne est la i-ème coordonnée du vecteur $u(e_j)$.
   D'un autre côté comme $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée, la i-ème coordonnée dans $\mathcal{B}$ du vecteur $u(e_j)$ est $(u(e_j)|e_i)$.

   Ceci justifie que : $\boxed{a_{i,j} = (u(e_j) \mid e_i)}$

   (b) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Je note $a'_{i,j}$ le coefficient en position (i, j) de la matrice ${}^t\mathrm{A}$. Selon la question précédente, on a

   $$a_{i,j} = (u(e_j) \mid e_i) = -(e_j \mid u(e_i)) = -(u(e_i) \mid e_j) = -a_{j,i} = -a'_{i,j}$$

   Ainsi on a en déduit l'égalité : $\boxed{{}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}}$

2. On a
   $$\det(\mathrm{A}) = \det\left({}^t\mathrm{A}\right) = \det(-\mathrm{A}) = (-1)^n \det(\mathrm{A})$$
   Or $\det(\mathrm{A}) = \det(u) \neq 0$ car u est automorphisme de E
   donc $(-1)^n = 1$ ainsi $\boxed{\text{l'entier } n \text{ est un nombre pair}}$

3. On a $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ (ensemble des automorphismes de E) or $(\mathrm{GL}(\mathrm{E}), \circ)$ est un groupe.
   donc $v \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ ainsi v un automorphisme de E. *Non demandé par le sujet initial.*
   La matrice de $v = u^2$ dans la base $\mathcal{B}$ est A^2 et ${}^t\left(\mathrm{A}^2\right) = \left({}^t\mathrm{A}\right)^2 = (-\mathrm{A})^2 = \mathrm{A}^2$
   Ainsi la matrice de v dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ de E est symétrique donc l'endomorphisme est symétrique.
   Ainsi $\boxed{v \text{ est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de E}}$

4. On considère x un vecteur propre de v associé à λ. On a $v(x) = \lambda x$.
   D'une part, $(v(x) \mid x) = \lambda(x \mid x) = \lambda\|x\|^2$ et d'autre part $(v(x) \mid x) = \left(u^2(x) \mid x\right) = -(u(x) \mid u(x)) = -\|u(x)\|^2$
   donc $\lambda\|x\|^2 = -\|u(x)\|^2$ or $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ donc $u(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ car u est un automorphisme de E
   d'où $\|x\|^2 > 0$ et $\|u(x)\|^2 > 0$ ainsi $\boxed{\lambda < 0}$

5. (a) On a $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ (vecteur propre) et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ donc $1 \leqslant \dim(\mathrm{F}) \leqslant 2$.
   Par l'absurde, si on avait $\dim(\mathrm{F}) = 1$, on aurait $(u(x), x)$ liée
   ce qui nous fournit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \mu x$.
   Ainsi $\lambda x = v(x) = u^2(x) = \mu^2 x$ et $x \neq 0_{\mathrm{E}}$
   donc $\lambda = \mu^2$ donc $\mu^2 < 0$ d'après la question précédente
   ce qui est absurde car $\mu \in \mathbb{R}$. D'où $\boxed{\text{la dimension de F est égale à 2}}$

   (b) On a $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ et u linéaire et $\lambda \neq 0$. Ainsi

   $$u(\mathrm{F}) = \mathrm{Vect}(u(x), u^2(x)) = \mathrm{Vect}(u(x), v(x)) = \mathrm{Vect}(u(x), \lambda x) = \mathrm{Vect}(u(x), x) = \mathrm{F}$$

   donc $\boxed{\text{F est stable par l'automorphisme } u}$

   Soit $x \in \mathrm{F}^\perp$. Montrons $u(x) \in \mathrm{F}^\perp$ c'est à dire : $\forall y \in \mathrm{F},\ x \perp y$.
   Soit alors $y \in \mathrm{F}$. On a $u(y) \in \mathrm{F}$ d'après ce qui précède et donc $x \perp u(y)$ ainsi

   $$(u(x) \mid y) = -(x \mid u(y)) = 0$$

   On conclut que $u(x) \in \mathrm{F}^\perp$. Ce qui permet d'en déduire que $\boxed{\text{l'orthogonal } \mathrm{F}^\perp \text{ est aussi stable par } u}$

(c) D'après (a) et (b), $(x, u(x))$ est génératrice de F et $\dim(\mathrm{F}) = 2$ ainsi il s'agit d'une base de F.
Comme $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, on peut noter les vecteurs de F : $e_1' = \dfrac{1}{\|x\|}x$ et $e_2' = \dfrac{1}{a\|x\|}u(x)$ comme dans l'indication.
On a alors $\|e_1'\| = 1$ et comme $u^2(x) = v(x) = \lambda x$, on a

$$\|e_2'\|^2 = (e_2' \mid e_2') = \frac{(u(x) \mid u(x))}{a^2\|x\|^2} = \frac{-\left(x \mid u^2(x)\right)}{-\lambda\|x\|^2} = \frac{(x \mid \lambda x)}{\lambda\|x\|^2} = 1$$

et on a $(e_1' \mid e_2') = 0$ car

$$(e_2' \mid e_1') = \frac{(u(x) \mid x)}{a\|x\|^2} = \frac{-(x \mid u(x))}{a\|x\|^2} = -(e_1' \mid e_2') = -(e_2' \mid e_1')$$

ainsi $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ est une famille orthonormale de F donc base orthonormée car $\dim \mathrm{F} = 2$
de plus comme u est linéaire et $a = \sqrt{-\lambda} \neq 0$, on a :

$$u(e_1') = \frac{1}{\|x\|}u(x) = ae_2' = 0e_1' + ae_2'$$

et comme $u^2(x) = v(x) = \lambda x$, on a :

$$u(e_2') = \frac{1}{a\|x\|}u^2(x) = \frac{\lambda}{a\|x\|}x = \frac{-a^2}{a\|x\|}x = -ae_1' + 0e_2'$$

$$\boxed{\text{il existe une base orthonormée } \mathcal{B}' \text{ de F telle que la matrice de } u_{\mathrm{F}} \text{ dans la base } \mathcal{B}' \text{ soit } \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}}$$

(d) $u_{\mathrm{F}^\perp}$ est un endomorphisme de $\mathrm{F}^\perp$ selon (b). Soit $x \in \mathrm{F}^\perp$. On a

$$x \in \operatorname{Ker}(u_{\mathrm{F}^\perp}) \iff u_{\mathrm{F}^\perp}(x) = 0_{\mathrm{E}} \iff u(x) = 0_{\mathrm{E}} \iff x = 0_{\mathrm{E}}$$

car u est un autmorphisme de E.
Ainsi $\operatorname{Ker}(u_{\mathrm{F}^\perp}) = \{0_{\mathrm{E}}\}$ or $\mathrm{F}^\perp$ est de dimension finie $(n-2)$
donc $u_{\mathrm{F}^\perp}$ est un automorphisme de $\mathrm{F}^\perp$ et on a :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{F}^\perp \times \mathrm{F}^\perp,\ (u_{\mathrm{F}^\perp}(x) \mid y) = (u(x) \mid y) = -(x \mid u(y)) = -(x \mid u_{\mathrm{F}^\perp}(y)) \qquad (1)$$

Ainsi $\boxed{\text{l'endomorphisme } u_{\mathrm{F}^\perp} \text{ est un automorphisme vérifiant la relation (1)}}$

6. On reprend les notations et résultats de 5). On y a trouvé une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de F dans laquelle u_{F} a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que a est non nul car $a^2 = -\lambda > 0$.

Comme E est de dimension finie, on a $\mathrm{F} \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E}$ donc $\dim\left(\mathrm{F}^\perp\right) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{F}) = 4 - 2 = 2$
$u_{\mathrm{F}^\perp}$ est un automorphisme de $\mathrm{F}^\perp$ vérifiant la relation (1). alors en faisant comme en 5) trouver e_1'' et $e_2'' \in \mathrm{F}^\perp$ tels que : $\mathcal{B}_2 = (e_1'', e_2'')$ base orthonormée de G stable par $u_{\mathrm{F}^\perp}$ dans la qulle la matrice a la même forme que celle obtenue en 5(c) (ou ci-dessus).
On remarque que $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$ car G sous-espace de $\mathrm{F}^\perp$ de dimension égale à 2

En concaténant les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}_2$, on obtient $\mathcal{B}''$ une base adaptée à $\mathrm{F} \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E}$ d'où l'existence de

$$\boxed{\alpha, \beta \in \mathbb{R}^* \text{ et } \mathcal{B}\text{" base orthonormée de E tels que la matrice de } u \text{ dans } \mathcal{B}\text{" soit égale à : } \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}}$$

Exercice 3 : Réduction (CCP)

Q1. $\boxed{A \text{ est symétrique réelle donc diagonalisable}}$ (et même orthodiagonalisable).

De manière évidente, on observe que :

- $(1,1,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 4 ;
- l'orthogonal du vecteur $(1,1,1)$ est engendré par $(1,-1,0)$ et $(1,0,-1)$, qui sont des vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre 1.

On en déduit que $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \operatorname{diag}(4,1,1) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})}$.

Pour la suite, on calcule $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Q2. On pose $B = P\operatorname{diag}(2,1,1)P^{-1} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et on a alors $B^2 = P\operatorname{diag}(2,1,1)^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Plus explicitement, $\boxed{B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$.

Q3. $A^n = PD^nP^{-1} = P\operatorname{diag}(4^n,1,1)P^{-1}$, ce qui donne après calculs : $\boxed{A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}}$.

Q4. Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal π_A est scindé à racines simples qui sont les valeurs propres de A, d'où $\boxed{\pi_A = (X-4)(X-1) = X^2 - 5X + 4}$.

On effectue la division euclidienne de X^n par π_A :

$$X^n = \pi_A Q + aX + b \quad (*)$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

En évaluant (*) en 1 et 4, on obtient le système $\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+b=4^n \end{cases}$ d'unique solution $(a,b) = \left(\dfrac{4^n-1}{3}, \dfrac{4-4^n}{3}\right)$.

En évaluant maintenant (*) en A, on obtient : $A^n = 0Q(A) + aA + bI_3$, d'où finalement :

$$\boxed{A^n = \frac{4^n-1}{3}A + \frac{4-4^n}{3}I_3}.$$

Remarque : ce résultat est bien cohérent avec celui de la question précédente.

Problème : Préhilbertiens (CCP)

Partie I - Exemples, propriétés

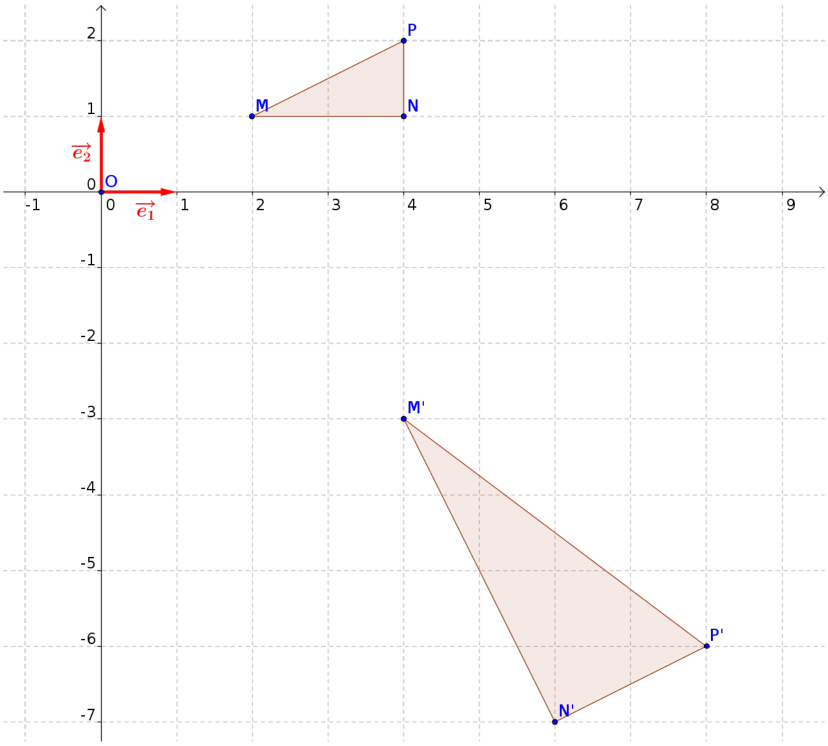
Q10. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A, *i.e.* l'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.
Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. $u(X) = (x+2y, -2x+y)$ donc

$$\|u(X)\| = \sqrt{(x+2y)^2 + (-2x+y)^2} = \sqrt{x^2+4xy+4y^2+4x^2-4xy+y^2} = \sqrt{5}\,\|X\|$$

d'où $\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } k = \sqrt{5}}$.

Remarque : il faut bien dire **une** *similitude de rapport k et non pas* **la** *similitude de rapport k comme écrit dans l'énoncé, car une telle similitude n'est pas unique ; en effet $k\operatorname{Id}_E$ et $-k\operatorname{Id}_E$ sont deux similitudes distinctes de rapport k.*

Q11. On a les trois points $M'(4,-3)$, $N'(6,-7)$ et $P'(8,-6)$.



Le triangle MNP étant rectangle en N, son aire vaut : $\mathscr{A}_{MNP} = \dfrac{MN \times NP}{2} = \dfrac{2\times 1}{2} = 1$.

L'aire de $M'N'P'$ vaut : $\mathscr{A}_{M'N'P'} = \left|\dfrac{1}{2}\det_{bc}\left(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}\right)\right| = \left|\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}\right| = 5$ (bc désigne la base canonique).

On remarque que $\boxed{\mathscr{A}_{M'N'P'} = 5\mathscr{A}_{MNP} = k^2\mathscr{A}_{MNP}, \text{ avec } k = \sqrt{5} \text{ le rapport de la similitude}}$.

Remarque : le rapport $k^2 = 5$ entre les deux aires correspond à la valeur absolue du déterminant de u (cf. programme de MPSI : interprétation géométrique du produit mixte en termes de volume orienté, effet d'une application linéaire).

Q12. Soit $u \in \mathrm{Sim}(E)$ de rapport $k > 0$.
Si $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $k\|x\| = \|u(x)\| = \|0\| = 0$, donc $\|x\| = 0$ car $k \neq 0$, d'où $x = 0$ par séparation de la norme. On a donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ (l'inclusion réciproque étant évidente) d'où u est injectif.
Comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que $\boxed{u \text{ est bijectif}}$.

Montrons que $\mathrm{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.

- $\mathrm{Sim}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ d'après ce qui précède.
- $\mathrm{Sim}(E)$ contient le neutre Id_E du groupe $(\mathrm{GL}(E), \circ)$, qui est une similitude de rapport 1 puisque pour tout x dans E, $\|\mathrm{Id}_E(x)\| = \|x\|$.
- **Stabilité par $\circ$:**
  Soient u et $v \in \mathrm{Sim}(E)$, de rapports respectifs k et k' dans $\mathbb{R}_+^*$.
  On a alors pour tout $x \in E$: $\|u \circ v(x)\| = k\|v(x)\| = kk'\|x\|$ avec $kk' > 0$ car $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe.
  Ainsi, $u \circ v$ est une similitude de rapport kk', ce qui montre que $\mathrm{Sim}(E)$ est stable par $\circ$.
- **Stabilité par inverse :**
  On reprend la même similitude u.
  Pour tout $x \in E$: $\|x\| = \|u \circ u^{-1}(x)\| = k\|u^{-1}(x)\|$, d'où $\|u^{-1}(x)\| = \dfrac{1}{k}\|x\|$ avec $\dfrac{1}{k} > 0$.
  Ainsi, u^{-1} est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$, ce qui montre que $\mathrm{Sim}(E)$ est stable par inverse.

Finalement, $\mathrm{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$, donc $\boxed{\mathrm{Sim}(E) \text{ est un groupe pour la loi } \circ}$.

Q13. Soit x un vecteur quelconque de E.
Notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.
Alors AX est la matrice colonne des coordonnées de $u(x)$ dans $\mathscr{B}$, et comme la base $\mathscr{B}$ est orthonormée on a donc :

$$\|x\| = \sqrt{{}^tXX} \quad \text{et} \quad \|u(x)\| = \sqrt{{}^t(AX)AX} = \sqrt{{}^tX\,{}^tAAX}.$$

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{O}(E) &\iff \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\| \\ &\iff \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \sqrt{{}^tX\,{}^tAAX} = \sqrt{{}^tXX} \quad (\text{car } x \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \text{ est surjective de } E \text{ dans } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \\ &\iff \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\,{}^tAAX = {}^tXX \end{aligned}$$

Si ${}^tAA = I_n$, il est clair que la dernière propriété est vérifiée, donc $u \in \mathrm{O}(E)$.
Réciproquement, supposons que $u \in \mathrm{O}(E)$, et notons $(c_{i,j})$ la famille des coefficients de la matrice ${}^tAA$.
En prenant $X = e_i$ dans la relation précédente (i-ième vecteur de la base canonique), on obtient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad c_{i,i} = 1.$$

En prenant ensuite $X = e_i + e_j$ avec $i \neq j$, il vient $c_{i,i} + c_{i,j} + c_{j,i} + c_{j,j} = 2$, d'où $c_{i,j} + c_{j,i} = 0$.
La matrice ${}^tAA$ étant symétrique (car ${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$), on a donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \implies c_{i,j} = 0$$

et finalement ${}^tAA = I_n$.
Nous avons ainsi établi l'équivalence souhaitée : $\boxed{u \in \mathrm{O}(E) \iff {}^tAA = I_n}$.

On montre exactement de la même façon que :

$$\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } k \text{ si, et seulement si, } {}^tAA = k^2 I_n}.$$

Remarque : la première équivalence, qui est une question de cours, est plus simple à établir en utilisant la caractérisation des automorphismes orthogonaux par l'image d'une base orthonormée, mais cette démonstration ne peut alors plus se généraliser directement pour les similitudes, car nous ne disposons pas dans l'énoncé d'une caractérisation des similitudes par l'image d'une base orthonormée.
De même, la démonstration proposée ci-dessus peut être simplifiée en utilisant la caractérisation des automorphismes orthogonaux par la conservation du produit scalaire ; on obtient ainsi l'équivalence : $u \in \mathrm{O}(E) \iff \forall (X,Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ {}^tX\,{}^tAAY = {}^tXY$, qui permet de raccourcir la fin de la preuve en prenant directement pour X et Y deux vecteurs e_i et e_j de la base canonique. Néanmoins, cette démonstration ne peut pas, à ce stade, se généraliser pour les similitudes, car la caractérisation adéquate des similitudes ne sera établie qu'à la question **Q18**.
À noter aussi que la seconde caractérisation matricielle aurait été très facile à déduire de la première en utilisant le résultat de la question **Q16**.

Q14. Notons u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Après calculs on trouve ${}^tAA = 9I_3$, donc d'après la question précédente et le caractère orthonormé de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } 3}$.

La matrice de la similitude u^{-1} est $A^{-1} = \dfrac{1}{9}\,{}^tA = \boxed{\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$.

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$, de matrice M dans la base canonique.
La matrice de $u^{-1} \circ f \circ u$ dans la base canonique est $N = A^{-1}MA = \dfrac{1}{9}\,{}^tAMA$. Calculons ${}^tNN$.

$$\begin{aligned} {}^tNN &= \frac{1}{81}\,{}^tA\,{}^tMA\,{}^tAMA \\ &= \frac{1}{9}\,{}^tA\,{}^tMMA && \text{car } A\,{}^tA = A \times 9A^{-1} = 9I_3 \\ &= \frac{1}{9}\,{}^tAA && \text{car } {}^tMM = I_3, \text{ puisque } f \in \mathrm{O}(E) \\ &= I_3 && \text{car } {}^tAA = 9I_3. \end{aligned}$$

Comme la base canonique est orthonormée, on en déduit grâce à la question **Q13** que $\boxed{u^{-1} \circ f \circ u \in \mathrm{O}(E)}$.

Remarque : cette dernière propriété reste vraie pour n'importe quelle similitude, comme on peut le voir facilement grâce à la caractérisation de la question **Q16**.

Q15. On note $S(x,r)$ la sphère de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$.
Soit u un endomorphisme de E possédant la propriété de l'énoncé. En particulier, l'image par u de $S(0,1)$ est égale à $S(0,k)$ pour un certain $k > 0$. Montrons que u est une similitude de rapport k.
Soit $x \in E \backslash \{0\}$. Le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, donc il appartient à $S(0,1)$. On en déduit que son image par u appartient à $S(0,k)$, d'où $\left\| u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| = k$.

Or $\left\| u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\| \dfrac{1}{\|x\|} u(x) \right\| = \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$, d'où $\|u(x)\| = k\|x\|$, cette dernière égalité restant valable lorsque x est le vecteur nul.
Nous avons ainsi montré que $\boxed{u \text{ est une similitude de } E}$.

Partie II - Assertions équivalentes

Q16. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $u \in \mathrm{Sim}(E)$ de rapport $k > 0$.

Alors $\boxed{u = h \circ v = v \circ h \text{ avec } h = k\,\mathrm{Id}_E \text{ une homothétie vectorielle non nulle de } E \text{ et } v = \frac{1}{k} u \in \mathrm{O}(E)}$,

car $v \in \mathscr{L}(E)$ et $\forall x \in E,\ \|v(x)\| = \left\| \dfrac{1}{k} u(x) \right\| = \dfrac{1}{k}\|u(x)\| = \dfrac{1}{k} k\|x\| = \|x\|$.

Remarque : la solution n'est pas unique : on peut aussi prendre $h = -k\,\mathrm{Id}_E$ *et* $v = -\dfrac{1}{k}u$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $u = h \circ v$ avec h une homothétie non nulle de E et $v \in \mathrm{O}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ le rapport de h.
$u \in \mathscr{L}(E)$ (car $\mathscr{L}(E)$ est stable par composition) et $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|\lambda v(x)\| = |\lambda| \cdot \|v(x)\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ avec $|\lambda| > 0$, donc $\boxed{u \text{ est une similitude}}$ de rapport $|\lambda|$.

Q17. $\boxed{A = HB \text{ avec } H = \sqrt{5}\, I_2 \text{ qui est la matrice d'une homothétie (dans la base canonique) et } B = \frac{1}{\sqrt{5}} A.}$

Notons v l'endomorphisme canoniquement associé à B.
L'endomorphisme u canoniquement associé à A étant une similitude de rapport $\sqrt{5}$ (cf. **Q10**), $v = \dfrac{1}{\sqrt{5}} u$ est un automorphisme orthogonal (cf. preuve de la question précédente).
Son déterminant est égal à 1 donc il s'agit d'une rotation de $\mathbb{R}^2$.
Son angle θ vérifie $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, donc $\tan\theta = -2$ d'où $\theta \equiv -\operatorname{Arctan}(2)\ [\pi]$ et comme $\cos\theta > 0$, $\theta \equiv -\operatorname{Arctan}(2)\ [2\pi]$.
Finalement, $\boxed{v \text{ est la rotation de } \mathbb{R}^2 \text{ d'angle } -\operatorname{Arctan}(2)}$.

Remarque : de même que dans la question précédente, la solution n'est pas unique : on peut aussi prendre $H = -\sqrt{5}\, I_2$ *et* $B = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} A$, *qui est la matrice de la rotation d'angle* $-\operatorname{Arctan}(2) + \pi$.

Q18. Soient x et y dans E.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y | x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x|y \rangle + \|y\|^2$$
$$\|x-y\|^2 = \langle x-y | x-y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x|y \rangle + \|y\|^2$$

d'où par différence : $\boxed{\langle x|y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}$ (formule de polarisation).

$\boxed{\Rightarrow}$ Si u est une similitude de rapport k, alors pour tous x et y dans E :

$$\begin{aligned}
\langle u(x)|u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\big(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\big) && \text{d'après la formule de polarisation}\\
&= \frac{1}{4}\big(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\big) && \text{car } u \text{ est linéaire}\\
&= \frac{1}{4}\big(k^2\|x+y\|^2 - k^2\|x-y\|^2\big) && \text{car } u \text{ est une similitude de rapport } k\\
&= k^2\langle x|y\rangle && \text{d'après la formule de polarisation.}
\end{aligned}$$

On a donc bien : $\boxed{\forall (x,y)\in E^2,\ \langle u(x)|u(y)\rangle = k^2\langle x|y\rangle}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, si l'égalité $\langle u(x)|u(y)\rangle = k^2\langle x|y\rangle$ est vérifiée pour tous x et y de E, alors en particulier pour $x=y$ on a $\|u(x)\|^2 = k^2\|x\|^2$ d'où $\|u(x)\| = k\|x\|$ et ainsi $\boxed{u \text{ est une similitude directe}}$.

Remarque : pour l'implication réciproque, on a supposé que u était un endomorphisme de E et $k>0$, bien que cela ne soit pas précisé dans l'énoncé. Le cas où u est une application quelconque de E dans E est traité dans la dernière question **Q20**.

Q19. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $u\in \mathrm{Sim}(E)$ de rapport k et soient x et y dans E tels que $\langle x|y\rangle = 0$.
D'après la question précédente, $\langle u(x)|u(y)\rangle = k^2\langle x|y\rangle = 0$. Ainsi, $\boxed{u \text{ conserve l'orthogonalité}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $u\in\mathscr{L}(E)$ qui conserve l'orthogonalité et soit $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de E.
Soient i et j dans $[\![1,n]\!]$.
$\langle e_i+e_j|e_i-e_j\rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1-1$, donc $\boxed{\langle e_i+e_j|e_i-e_j\rangle = 0}$.

Comme u préserve l'orthogonalité, on a aussi $\langle u(e_i+e_j)|u(e_i-e_j)\rangle$, ce qui donne par linéarité de u : $\langle u(e_i)+u(e_j)|u(e_i)-u(e_j)\rangle = 0$, *i.e.* $\|u(e_i)\|^2 - \|u(e_j)\|^2 = 0$, d'où $\boxed{\|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|}$.

Soit k la valeur commune des $\|u(e_i)\|$, $i\in[\![1,n]\!]$.
Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\|u(e_i)\| = k$ et $\|e_i\|=1$, d'où $\boxed{\|u(e_i)\| = k\|e_i\|}$ (cette égalité, bien que demandée par l'énoncé, n'est d'aucune utilité pour la suite).
Soit $x\in E$ de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.
$x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_ie_i$ d'où, par linéarité, $u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_iu(e_i)$.
Les e_i étant deux à deux orthogonaux, il en est de même des $u(e_i)$ car u conserve l'orthogonalité, donc d'après le théorème de Pythagore : $\|u(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\|u(e_i)\|^2 = k^2\sum_{i=1}^n x_i^2 = k^2\|x\|^2$ (la dernière égalité provient du caractère orthonormé de la base $\mathscr{B}$), et donc $\|u(x)\| = k\|x\|$.
On a ainsi montré que $\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } k}$, **à condition que k soit strictement positif**, ce qui n'est pas automatiquement le cas (u peut être l'endomorphisme nul, et il s'agit en fait du seul endomorphisme conservant l'orthogonalité qui n'est pas une similitude).

Remarque : l'énoncé était donc ici incorrect. Il aurait fallu supposer, pour la réciproque, que u était non nul ou que u était un automorphisme.

Q20. Soient x et y dans E, λ dans $\mathbb{R}$. On veut montrer que le vecteur $z = \lambda u(x) + u(y) - u(\lambda x+y)$ est nul.

$$\begin{aligned}
\|z\|^2 &= \langle \lambda u(x)+u(y)-u(\lambda x+y)|\lambda u(x)+u(y)-u(\lambda x+y)\rangle\\
&= \|\lambda u(x)+u(y)\|^2 - 2\langle \lambda u(x)+u(y)|u(\lambda x+y)\rangle + \|u(\lambda x+y)\|^2\\
&= \lambda^2\|u(x)\|^2 + 2\lambda\langle u(x)|u(y)\rangle + \|u(y)\|^2 - 2\lambda\langle u(x)|u(\lambda x+y)\rangle - 2\langle u(y)|u(\lambda x+y)\rangle + k^2\|\lambda x+y\|^2\\
&= \lambda^2k^2\|x\|^2 + 2\lambda k^2\langle x|y\rangle + k^2\|y\|^2 - 2\lambda k^2\langle x|\lambda x+y\rangle - 2k^2\langle y|\lambda x+y\rangle + k^2\lambda^2\|x\|^2 + 2k^2\lambda\langle x|y\rangle + k^2\|y\|^2\\
&= k^2(\lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x|y\rangle + \|y\|^2 - 2\lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda\langle x|y\rangle - 2\lambda\langle x|y\rangle - 2\|y\|^2 + \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x|y\rangle + \|y\|^2)\\
&= 0
\end{aligned}$$

d'où $z=0$ et par suite $u(\lambda x+y) = \lambda u(x)+u(y)$, ce qui montre que $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E}$.

D'après **Q18**, on en déduit que $\boxed{u \text{ est une similitude de } E}$.

Exercice 4 : Réduction (CNC)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$; on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1.1. Par définition du polynôme caractéristique, on a :

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 0 \\ -1 & X-1 & X-2 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} && C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 0 \\ 1 & X-1 & 0 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
&= \begin{vmatrix} X-2 & X-2 & 0 \\ 1 & X-1 & 0 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} && L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
&= \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 1 & X-2 & 0 \\ -2 & 2 & X-2 \end{vmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\
&= (X-2)^3
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$, c'est-à-dire que A possède une seule valeur propre $\lambda = 2$

1.2. Soit $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors $x \in \ker(v - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ si, et seulement, si $(A - 2I_3)X = 0$. Or

$$\begin{aligned}
(A-2I_3)X = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a+b-c &= 0 \\ a-b+c &= 0 \\ a &= 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\ker(v - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbf{Vect}\left((0,1,1)\right)$

1.3.
- La valeur propre 2 de A est d'ordre de multiplicité 3 et la dimension de son sous-espace propre est de dimension 1, donc elle n'est pas diagonalisable.
- χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, alors A est trigonalisable sur $M_3(\mathbb{R})$

1.4. On pose $u = v - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$

1.4.1. On a : $u^3 = (v - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^3 = \chi_v(v)$. Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que $\chi_v(v) = 0$ et, par suite, $u^3 = 0$. Donc u est nilpotent

1.4.2. La matrice représentative de u^2 est $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, donc pour $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$x \in \ker(u^2) \Longleftrightarrow a+b-c = 0 \Longleftrightarrow c = a+b$$

Donc $\ker(u^2) = \mathbf{Vect}\left((1,0,1),(0,1,1)\right)$.
$e_1 = (1,0,0) \notin \ker(u^2)$, car $u^2(e_1) = (0,2,2) \neq (0,0,0)$

1.4.3. Posons $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\underset{\mathcal{B}_c}{\mathrm{Mat}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ dont le déterminant $-2 \neq 0$, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $T = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$