Préparation Concours Blanc N° 1

Réduction & Préhilbertiens

Exercice 1 : (e3a 2016, Préhilbertiens)

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' + y = v$$

où v est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire telle que :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ v(t) = t$$
$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],\ v(t) = \pi - t$$

On va étudier différentes méthodes de résolution approchée de l'équation différentielle (E) sur $[0, \pi]$.

1. Représenter graphiquement la fonction v sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

Partie 1 – Approximation dans un espace préhilbertien réel

On note $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions qui sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continues ; on rappelle que $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$). On note E l'ensemble des fonctions f appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ qui sont 2π-périodiques et impaires. Pour des éléments f et g de E, on pose :

$$\varphi(f, g) = \int_0^{\pi} f(t) g(t)\, \mathrm{d}t$$

(on notera également $\left(f / g\right)$ à la place de $\varphi(f, g)$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$s_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(nt)$$

2. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

3. Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

4. Démontrer que la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale de E.

5. Démontrer que $(v / s_1) = 2$ et $(s_1 / s_1) = \dfrac{\pi}{2}$.

6. Calculer (v / s_2).

7. Déterminer le projeté orthogonal de v sur $\mathrm{Vect}(s_1, s_2)$ où v est la fonction définie en introduction. Ce projeté orthogonal est noté v_2.

8.

(a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = \sin(t)$.

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = v_2$. Déterminer la solution qui s'annule en 0.

Exercice : (CCP 2021, Reduction)

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note, pour n entier naturel, $n \geq 2$:

- M_n (K) le K-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans K.
- $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

Q1. On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique ($\langle A|B\rangle = \text{trace}({}^t A.B)$), déterminer $\left(D_n(\mathbb{R})\right)^{\perp}$, l'orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

PROBLÈME - Théorème de décomposition de Dunford

(CCP 2021, Reduction)

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

Si A est une matrice de $M_n(\text{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur K, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\text{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
(1) $A = D + N$;
(2) D est diagonalisable dans $M_n(\text{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
(3) N est nilpotente ;
(4) $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.

Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Quelques exemples

Q2. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\text{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\text{K})$ est nilpotente.
Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.
Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Q3. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

Q4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

Q5. Application

Pour $A \in M_n(\mathrm{K})$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ est l'exponentielle de la matrice A.

Déduire de la question précédente l'exponentielle de la matrice A définie en **Q4**.

On pourra utiliser sans démonstration que si M et N sont deux matrices de $M_n(\mathrm{K})$ qui commutent, $\exp(M+N) = (\exp M)(\exp N)$.

Q6. Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2.

Démontrer que le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par : $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Q7. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?

Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\,\mathrm{id})^2$.

Q8. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_1\}$, $\ker(u - 2\,\mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_2\}$ et $\ker(u - 2\,\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}\{e_2, e_3\}$.

Écrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Q9. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

Q10. Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2 V(X) = 1 \text{ avec } \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1.$$

Q11. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\,\mathrm{id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{id})$.

Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(u - 2\,\mathrm{id})^2$ et q est le projecteur sur $\ker(u - 2\,\mathrm{id})^2$ parallèlement à $\ker(u - \mathrm{id})$.

Q12. On pose $d = p + 2q$. Écrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question **Q8**).
Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q13. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.
Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.
Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.

Q14. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathrm{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

Q15. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathrm{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.

Q16. Déterminer les matrices de $M_n(\mathrm{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.

Q17. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathrm{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A.
Établir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Fin.

Le Corrigé

Exercice 1 : (e3a 2016, Préhilbertiens)

1. L'énoncé demande un tracé à la main mais on va le faire ici avec Python (ce qui répond en grande partie aux questions 9, 10 et 11).

   La fonction est continue et affine par morceaux, il suffit de donner la liste des coordonnées des points qui contiennent l'information pertinente, ceux d'abscisse $k\,\frac{\pi}{2}$ pour k dans $[\![0,8]\!]$.

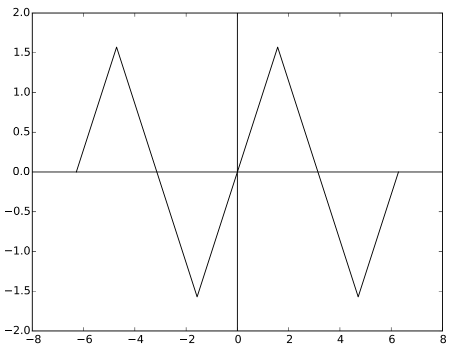
   L'imparité de v peut se traduire par
   $$v(t) = t \text{ pour tout } t \text{ dans } [0, \tfrac{\pi}{2}] \text{ et } v(t) = \tfrac{t}{|t|}\,\pi - t \text{ pour } |t| \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi].$$
   Pour une fonction f, T-périodique et définie par un motif m connu sur un intervalle $[a, a+T[$ (ou $[a, a+T]$), on a *(à (re-)démontrer peut-être ...)*
   $$f(t) = m\big(t - \lfloor \tfrac{t-a}{T} \rfloor \cdot T\big),$$
   donc, ici, en notant m la restriction de v au segment $[-\pi, \pi]$ on a $v(t) = m\big(t - 2\,\pi\,\lfloor \frac{t+\pi}{2\,\pi} \rfloor\big)$.

   Avec (on suppose tous les modules, sous-modules et fonctions utiles importées)

```
def mot(t):
    if abs(t)<= pi/2:
        return t
    else:
        return t/abs(t)*pi-t
def v(t):
    return mot(t-floor((t+pi)/2/pi)*2*pi)

T = [-2*pi+i*pi/2 for i in range(9)]
Y = [v(t) for t in T]
plot(T,Y,'k')
axhline(color='k')
axvline(color='k')
```

   On obtient :



   REPRÉSENTATION DE v SUR $[-2\,\pi, 2\,\pi]$

2. La fonction nulle est continue, $2\,\pi$-périodique et impaire et toutes combinaisons linéaires de telles fonctions est encore une fonction continue, $2\,\pi$-périodique et impaire :
   $$E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}^0(\mathbb{R}).$$

3. • Avec la continuité du produit $f\,g$ sur le segment $[0, \pi]$ pour f et g dans E, l'intégrale $\varphi(f, g)$ est bien définie.

   • Avec la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, on a $\varphi(f, g) = \varphi(g, f)$: φ est symétrique.

Avec la structure d'algèbre de $\mathbb{R}$ et la linéarité de l'intégrale, pour (f,g,h) dans E^3 et (a,b) dans $\mathbb{R}^2$, on a $\varphi(a\,f+b\,g,h)=a\,\varphi(f,h)+b\,\varphi(g,h)$: φ est linéaire à gauche, et, avec la symétrie, φ est une forme bilinéaire symétrique.

• Avec la positivité de l'intégrale, pour toute f dans E, on a $\varphi(f,f)=\int_0^\pi [f(t)]^2\,dt \geqslant 0$. Si, pour une f dans E, on a $\varphi(f,f)=0$, alors la fonction f^2 étant continue, à valeurs positives et d'intégrale nulle sur $[0,\pi]$, par théorème, $f(t)=0$ pour tout t dans $[0,\pi]$. Comme f est impaire, on a alors $f(t)=0$ pour tout t dans $[-\pi,0]$ et donc pour tout t dans $[-\pi,\pi]$. Comme f est 2π-périodique, on en déduit que f est nulle.

Ainsi φ est définie-positive et finalement, $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

4. Avec $\sin(a)\,\sin(b)=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$ et $\displaystyle\int_0^\pi \cos(k\,t)\,dt=\begin{cases}\pi \text{ pour } k=0\\ 0 \text{ pour } k\neq 0\end{cases}$, on a, pour (m,n) dans $\mathbb{N}^2$ tel que $m\neq n$, donc $m-n\neq 0$ et $m+n\neq 0$,
$$(s_m \mid s_n)=\int_0^\pi \sin(m\,t)\,\sin(n\,t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\cos[(m-n)\,t]-\cos[(m+n)\,t]\big)\,dt=0 :$$
$$\boxed{\text{la famille } (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est orthogonale}}\ .$$

5. Avec $s_1(t)=\sin(t)$ on a
$$(v\mid s_1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin(t)\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi-t)\,\sin(t)\,dt.$$
Deux intégrations par parties donnent
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin(t)\,dt=[-t\,\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,dt=[\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$
$$\text{et } \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi(\pi-t)\,\sin(t)\,dt=[-(\pi-t)\,\cos(t)]_{\frac{\pi}{2}}^\pi-\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\cos(t)\,dt=-[\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^\pi=1,$$
et finalement $\boxed{(s_1\mid v)=2}$.
En reprenant les calculs de la question précédente pour $m=n=1$ on obtient (avec $m+n\neq 0$ et $m-n=0$) $\boxed{(s1\mid s1)=\frac{\pi}{2}}$.

6. On a
$$(v\mid s_2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin(2\,t)\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi(\pi-t)\,\sin(2\,t)\,dt,$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin(2\,t)\,dt=\frac{1}{2}\left[-t\,\cos(2\,t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2\,t)\,dt=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}[\sin(2\,t)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4},$$
$$\text{et } \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi(\pi-t)\,\sin(2\,t)\,dt=\frac{1}{2}[-(\pi-t)\,\cos(2\,t)]_{\frac{\pi}{2}}^\pi-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\cos(2\,t)\,dt=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}[\sin(2\,t)]_{\frac{\pi}{2}}^\pi=-\frac{\pi}{4},$$
d'où $\boxed{(v\mid s_2)=0}$.

7. La famille (s_1,s_2) est une famille orthogonale de vecteur non nuls donc elle est libre et c'est une base du sous-espace qu'elle engendre. La formule de projection orthogonale donne alors, en notant v_2 le projeté orthogonal de v sur $F=\mathrm{Vect}(s_1,s_2)$,
$$v_2=\frac{(v|s_1)}{(s_1|s_1)}\cdot s_1+\frac{(v|s_2)}{(s_2|s_2)}\cdot s_2 : \boxed{v_2=\frac{4}{\pi}\cdot s_1}\ .$$

8. a) L'équation homogène $y'+y=0$ a pour ensemble de solutions la droite vectorielle engendrée par $[t\mapsto \mathrm{e}^{-t}]$ et il est raisonnable de chercher une solution de l'équation complète de la forme $y=a\,\cos+b\,\sin$. Pour une telle fonction on a $y'=-a\,\sin+b\,\cos$ et y est solution de l'équation différentielle si et seulement si $(a+b)\,\cos+(b-a)\,\sin=\sin$. Comme la famille $(\cos,\sin)$ est libre on obtient le système $\begin{cases}a+b=0\\ -a+b=1\end{cases}$ d'unique solution $(a,b)=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, d'où la (une) solution $y_0=\frac{1}{2}\,(\sin-\cos)$.
Avec le théorème de structure, on obtient la droite affine des solutions de l'équation complète $\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(y'+y=\sin)=\frac{1}{2}\,(\sin-\cos)+\mathrm{Vect}\big([t\mapsto \mathrm{e}^{-t}]\big)}$.
(il n'est pas interdit d'utiliser la méthode de variation de la constante ou d'autres méthodes ...)

b) La partie homogène est la même que pour l'équation précédente et v_2 est continue sur $\mathbb{R}$. Il ne reste plus qu'à trouver une solution de l'équation complète.
Avec $v_2 = \frac{4}{\pi}\sin$ et la linéarité de l'équation (parfois traduit en « principe de superposition » ...), il suffit de prendre cette fois $y_0 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2}(\sin - \cos) = \frac{2}{\pi} \cdot (\sin - \cos)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(y' + y = v_2) = \frac{2}{\pi}(\sin - \cos) + \mathrm{Vect}\big([t \mapsto \mathrm{e}^{-t}]\big)}\ .$$

Le théorème de Cauchy nous donne existence et unicité pour les (la) solutions du problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y' + y = v_2 \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$. Elle est de la forme $y(t) = \frac{2}{\pi}[\sin(t) - \cos(t)] + k\,\mathrm{e}^{-t}$ où k est déterminé par la condition $y(0) = 0$, c'est-à-dire ici $k = \frac{2}{\pi}$.

$$\boxed{\text{l'unique solution de } \left\{\begin{array}{l} y' + y = v_2 \\ y(0) = 0 \end{array}\right. \text{ est } \left[t \mapsto \frac{2}{\pi}\left(\sin(t) - \cos(t) + \mathrm{e}^{-t}\right)\right]}\ .$$

9-10-11) On a déjà répondu à cette question et aux deux suivantes en 1 :
`v_0_pi` est le motif `m` ;
il faut remplacer 8 par N, c'est-à-dire 9 par $N + 1$;
on a noté `T` et `Y` ce que l'énoncé note t et y.

12. Si on veut écrire court, en copiant la formule mathématique, on peut faire

```
rectangle = lambda u,a,b,n : sum([u(a+i*(b-a)/n) for i in range(n)])*(b-a)/n
```

Dans le contexte, il est plus raisonnable de proposer :

```
def rectangle (u,a,b,n):
    h = (b-a)/n
    t, s = a, 0
    for i in range(n):
        t += h
        s += u(t)
    return s*h
```

13. On suppose que la fonction sinus est disponible avec `sin` et on peut écrire

```
def v3(t):
    return v(t)*sin(3*t)
def n3(t):
    return (sin(3*t))**2
ps3 = rectangle(v3,0,pi,100)/rectangle(n3,0,pi,100)  # le calcul ...
print(ps3)  # et l'affichage
```

Exercice : (CCP 2021, Reduction)

1 – Soit $D \in D_n(\mathbb{R})$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$ et soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. On a alors :

$$ {}^t DA = DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \cdots & \lambda_1 a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n a_{n,1} & \cdots & \lambda_n a_{n,n} \end{pmatrix} $$

Donc $\langle D|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{i,i}$. Ainsi si $A \in (D_n(\mathbb{R}))^{\perp}$ on a en particulier pour $E_{k,k}$ avec $k \in [\![1,n]\!]$:

$$ 0 = \langle E_{k,k}|A\rangle = a_{k,k} $$

Donc les coefficients diagonaux de A sont tous nuls. Réciproquement, si $\forall i \in [\![1,n]\!], a_{i,i} = 0$ alors pour toute matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$, on a $\langle D|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{i,i} = 0$.

L'orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Problème : (CCP 2021, Reduction)

Partie I : quelques exemples

2 – Si A est diagonalisable, on pose alors $D = A$ et $N = 0$ et on vérifie immédiatement que le couple (D,N) vérifie les quatre propriétés de l'énoncé :

Si A est diagonalisable, sa décomposition de Dunford est $(A,0)$.

De la même façon et avec une vérification tout aussi immédiate :

Si A est nilpotente, sa décomposition de Dunford est $(D,N) = (0,A)$.

On pose désormais $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a bien $A = D + N$, D est diagonalisable car diagonale, N est nilpotente car $N^2 = 0$, mais $ND = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On n'a donc pas $ND = DN$ et le couple (D,N) proposé n'est pas la décomposition de Dunford de A.

3 – Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$; son polynôme caractéristique est $\chi_A=X^2+1$. Si A avait une décomposition de Dunford (D,N) dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors d'après l'énoncé on aurait $\chi_A=\chi_D$ et donc la matrice D diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ aurait un polynôme caractéristique non scindé : absurde. Ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice } A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \text{ n'a pas de décomposition de Dunford dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

4 – On a :

$$\chi_A=-\begin{vmatrix}3-X&0&8\\3&-1-X&6\\-2&0&-5-X\end{vmatrix}=(1+X)\begin{vmatrix}3-X&8\\-2&-5-X\end{vmatrix}=(1+X)\left(X^2+2X+1\right)$$

On a donc $\boxed{\chi_A=(1+X)^3}$.

Comme χ_A est scindé, A dispose d'une décomposition de Dunford notée (D,N) et la matrice D a pour polynôme caractéristique $\chi_D=\chi_A=(X+1)^3$. Donc $\mathrm{Sp}(D)=\{-1\}$ et D étant de plus diagonalisable, elle est semblable à $-\mathrm{I}_3$ qui n'est semblable qu'à elle-même.

Donc la décomposition de Dunford de A est (D,N) avec $D=-\mathrm{I}_3$ et $N=A+\mathrm{I}_3$, soit explicitement : $N=\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}$.

5 – Comme (D,N) est une décomposition de Dunford de A on a $A=D+N$ et $ND=DN$. Ainsi $\exp(A)=\exp(D)\exp(N)$.

Comme D est ici diagonale, on a $\exp(D)=\exp(-\mathrm{I}_3)=\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-1}\right)=\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{I}_3$.

On calcule maintenant $N^2=\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et par suite pour $n\geq 2$ $A^n=0$. Donc :

$$\exp(N)=\mathrm{I}_3+N=\begin{pmatrix}5&0&8\\3&1&6\\-2&0&-3\end{pmatrix}$$

Et finalement : $\boxed{\exp(A)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\begin{pmatrix}5&0&8\\3&1&6\\-2&0&-3\end{pmatrix}}$.

6 – Posons $P=X(X-1)$. On a alors $P\left(A^2\right)=A^2\left(A^2-\mathrm{I}_3\right)=\underbrace{A^2\left(A-\mathrm{I}_3\right)}_{=0}\left(A+\mathrm{I}_3\right)$. Donc :

$$\boxed{P = X(X-1) \text{ est un polynôme annulateur de } A^2}.$$

Posons alors $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

- On a $A = D + N$.
- P est un polynôme annulateur de A^2, non nul, scindé et à racines simples. Donc A^2 est diagonalisable.
- Comme A et $\mathrm{I}_3 - A$ commutent, on a $N^2 = A^2(\mathrm{I}_3 - A)^2 = \underbrace{A^2(A-\mathrm{I}_3)}_{=0}(A-\mathrm{I}_3) = 0$, donc N est nilpotente.
- Comme N et D sont des polynômes en A, on a $ND = DN$.

$\boxed{\text{Les points (1) à (4) ont bien été vérifiés et } (D,N) = (A^2, A - A^2) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$

Partie II : un exemple par deux méthodes

7 – On calcule en un premier temps le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = -\begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} -\begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ 2-X & -X & 1 \\ 0 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & -1 & 2-X \end{vmatrix}$$

Puis en retranchant la première colonne à la troisième et en développant par rapport à C_3 :

$$\chi_A = (X-2)(2-X)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2$$

Il s'en suit que A est diagonalisable si et seulement si $E_2(A) = \ker(A - 2\mathrm{I}_3)$ est un plan. Or $A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux dernières colonnes ne sont pas colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A - 2\mathrm{I}_3) \geq 2$ et par suite avec le théorème du rang $\dim(\ker(A - 2\mathrm{I}_3)) \leq 1$. $E_2(A)$ n'est donc pas un plan : $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Comme les polynômes $X-1$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux on a $\ker(\chi_A(A)) = \ker(A - \mathrm{I}_3) \oplus \ker(A - 2\mathrm{I}_3)^2$, et avec le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \ker(A - \mathrm{I}_3) \oplus \ker(A - 2\mathrm{I}_3)^2 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2}.$$

8 – Pour $X = {}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on résout : $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$. On pose alors $e_1 = {}^t(0,1,1)$ et $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{e_1\}$.

Puis on résout : $AX=2X \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-2y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=y \end{cases}$. On pose alors $e_2={}^t(1,1,0)$ et $\ker(u-2\,\mathrm{id})=\mathrm{Vect}\{e_2\}$.

On calcule $(A-2\mathrm{I}_3)^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

On résout alors $(A-2\mathrm{I}_3)^2X=0 \Leftrightarrow x=y$. On pose $e_3={}^t(0,0,1)$ et (e_2,e_3) et $\ker(u-2\,\mathrm{id})^2=\mathrm{Vect}\{e_2,e_3\}$. Cette famille étant visiblement libre, elle constitue une base de $\ker(u-2\,\mathrm{id})^2$ et comme $\mathbb{R}^3=\ker(u-\mathrm{id})\oplus\ker(u-2\mathrm{id})^2$ on a par concaténation :

Une base de $\mathbb{R}^3$ est (e_1,e_2,e_3) avec $e_1={}^t(0,1,1)$, $e_2={}^t(1,1,0)$ et $e_3={}^t(0,0,1)$. En outre $\ker(u-\mathrm{id})=\mathrm{Vect}\{e_1\}$, $\ker(u-2\,\mathrm{id})=\mathrm{Vect}\{e_2\}$ et $\ker(u-2\,\mathrm{id})^2=\mathrm{Vect}\{e_2,e_3\}$.

On a alors : $u(e_1)=e_1$, $u(e_2)=2e_2$. On calcule $u(e_3)={}^t(1,1,2)=e_2+2e_3$. Ainsi :

La matrice B de u dans la base (e_1,e_2,e_3) est $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9 – Posons $D_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a clairement $B=D_0+N_0$, D_0 est diagonalisable, $N_0^2=0$ et N_0 est ainsi nilpotente et enfin : $D_0N_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=N_0D_0$.

La décomposition de Dunford de B est ainsi (D_0,N_0) où D_0 et N_0 sont les matrices définies ci-dessus.

Appelons f et g les endomorphismes ayant pour matrices respectives D_0 et N_0 dans $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$. Il apparait alors clairement que (f,g) est la décomposition de Dunford de *u*.
Or A est la matrice dans la base canonique de *u*, donc si on appelle D et N les matrices respectives de *f* et *g* dans la base canonique alors (D,N) vérifie les points (1) à (4) et constitue la décomposition de Dunford de *A*.

La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a ainsi $D=PD_0P^{-1}$ et $N=PN_0P^{-1}$. On détermine P^{-1} en résolvant, pour $X={}^t(x,y,z)$ et $Y={}^t(a,b,c)$:

$$PX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} y=a \\ x+y=b \\ x+z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a+b \\ y=a \\ z=a-b+c \end{cases}$$

Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et :

$$D=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi que : $N=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{La décomposition de Dunford de } A \text{ est } (D,N) \text{ avec } D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

10 – La décomposition en éléments simples d'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-2}+\frac{c}{(X-2)^2}$$

- On multiplie par $X-1$ et on évalue en 1 : $a=1$.
- On multiplie par $(X-2)^2$ et on évalue en 2 : $c=1$.
- On multiplie par X et on regarde la limite en $+\infty$: $0=a+b$ et donc $b=-1$.

Finalement : $\boxed{\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}=\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X-2}+\frac{1}{(X-2)^2}}$.

Par suite : $1=(X-2)^2-(X-1)(X-2)+(X-1)=(X-2)^2+(3-X)(X-1)$.

$\boxed{\text{Si on pose } U=3-X \text{ et } V=1 \text{ on a l'égalité de Bézout : } (X-1)U+(X-2)^2V=1 \text{ et de plus } \deg(U)<2 \text{ et } \deg(V)<1.}$

11 – On va utiliser à plusieurs reprises dans cette question que des polynômes en u commutent. Ainsi partant de $(X-1)U+(X-2)^2V=1$ on a $U(u)\circ(u-\mathrm{id})+V(u)\circ(u-2\mathrm{id})^2=\mathrm{id}$, puis en évaluant en $x\in\mathbb{R}^3$: $\boxed{p(x)+q(x)=x}$.

En outre $(u-\mathrm{id})(p(x))=V(u)\circ(u-\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})^2(x)$. Or d'après le théorème de messieurs Cayley et Hamilton on a $(u-\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})^2=0$ et donc $p(x)\in\ker(u-\mathrm{id})$.

De même $(u-2\mathrm{id})(q(x))=U(u)\circ(u-\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})^2(x)=0$ et $q(x)\in\ker(u-2\mathrm{id})^2$.

En résumé, pour $x\in\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x=p(x)+q(x) \\ p(x)\in\ker(u-\mathrm{id}) \\ q(x)\in\ker(u-2\mathrm{id})^2 \end{cases}$, et $\mathbb{R}^3=\ker(u-\mathrm{id})\oplus\ker(u-2\mathrm{id})^2$.

On en déduit que p est la projection sur $\ker(u-\mathrm{id})$ de direction $\ker(u-2\mathrm{id})^2$ et que q est la projection sur $\ker(u-2\mathrm{id})^2$ de direction $\ker(u-\mathrm{id})$.

12 – On rappelle que $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ et que (e_1) est une base de $\ker(u-\mathrm{id})$ et que (e_2,e_3) est une base de $\ker(u-2\mathrm{id})^2$. Donc la matrice de p dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et celle de q est $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. La matrice de $p+2q$ dans $\mathcal{B}$ est alors $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

On reconnait là la matrice D_0 de la question 8 donc $p+2q=f$ (cf question 9 : on a appelé (f,g) la décomposition de Dunford de *u*). Il s'en suit que :

$$D=V(A)(A-2\mathrm{I}_3)^2+2U(A)(A-\mathrm{I}_3)=(A-2\mathrm{I}_3)^2+2(3\mathrm{I}_3-A)(A-\mathrm{I}_3)$$

Après développement : $\boxed{D=-A^2+4A-2\mathrm{I}_3 \text{ et } N=A-D=A^2-3A+2\mathrm{I}_3}$.

Partie III : une preuve de l'unicité de la décomposition

13 – Soit λ une valeur propre de *u* et $x\in E_\lambda(u)$. On a alors $u(x)=\lambda x$ et donc $v\circ u(x)=\lambda v(x)$. Sachant $v\circ u=u\circ v$ on en déduit $u(v(x))=\lambda v(x)$ et donc $v(x)\in E_\lambda(u)$. On a montré :

Tout sous-espace propre de *u* est stable par *v*.

Comme *u* est diagonalisable, on a $E=\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}}E_{\lambda_i}(u)$, et en appelant v_i l'endomorphisme induit par *u* sur $E_{\lambda_i}(u)$, v_i est diagonalisable (car endomorphisme induit sur un sous espace stable par un endomorphisme diagonalisable). Soit $\mathcal{B}_i$ une base de vecteurs propres de v_i. Les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ sont également vecteurs propres de *u* car éléments de $E_{\lambda_i}(u)$. Donc les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ sont vecteurs propres communs à *u* et à *v*.

Comme $E=\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}}E_{\lambda_i}(u)$, la concaténée $\mathcal{B}$ des $\mathcal{B}_i$ est une base de *E*, dont les vecteurs sont vecteurs propres communs à *u* et à *v* : on a trouvé une base commune de diagonalisation pour *u* et *v*.

14 – Soient *A* et *B* diagonalisables qui commutent d'endomorphismes associés α et β. Il existe alors une base de vecteurs propres communs à α et β. Soient A' et B' les matrices diagonales de α et β dans cette base commune de diagonalisation. La matrice dans cette base de $\alpha-\beta$ est alors la matrice diagonale $A'-B'$, ce qui montre que $A-B$ est diagonalisable.

15 – On se donne *A* et *B* nilpotentes qui commutent, d'indices de nilpotence respectifs *a* et *b*. Comme elles commutent, on a avec le binôme de Newton :

$$(A-B)^{a+b}=\sum_{k=0}^{a+b}\binom{a+b}{k}(-1)^{a+b-k}A^kB^{a+b-k}$$

Or pour $a \leq k \leq a+b$ on a $A^k = 0$ et pour $0 \leq k < a$ on a $a+b-k > b$ donc $B^{a+b-k} = 0$, et donc $(A-B)^{a+b} = 0$: $A-B$ est nilpotente.

16 – Supposons que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit diagonalisable et nilpotente, et soit *f* son endomorphisme canoniquement associé. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice *D* de *f* est diagonale et il existe par ailleurs $k \in \mathbb{N}$ tel que $M^k = 0$. On a alors $f^k = 0$ puis $D^k = 0$. *D* s'écrit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et alors $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k)$ et comme $D^k = 0$ les λ_i sont tous nuls. Donc $D = 0$ puis $f = 0$ et finalement $M = 0$.

$\boxed{\text{La matrice nulle est la seule matrice diagonalisable et nilpotente}}$.

17 – On suppose qu'il existe deux couples (D, N) et (D', N') vérifiant les propriétés (1) à (4) et tels que *D*, *N*, D' et N' soient des polynômes en *A*.
Comme *D* et D' sont des polynômes en *A*, *D* et D' sont deux matrices diagonalisables qui commutent. D'après la question 14 $D-D'$ est diagonalisable. De la même façon avec la question 15, $N-N'$ est nilpotente. Or de $A = N+D = N'+D'$ on déduit $N-N' = D-D'$. Donc $N-N'$ est nilpotente et diagonalisable donc nulle d'après la question 16. Ainsi $N = N'$ puis $D = D'$. On a montré :

$\boxed{\text{La décomposition de Dunford d'une matrice à polynôme caractéristique scindé est unique.}}$