Concours Blanc

Analyse & Probas

Durée : 4 heures

CONSIGNES

- le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction ;
- Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre ;
- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats ;
- Ne pas utiliser de correcteur (blanco) ;
- Les calculatrices sont interdites. ;
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Exercice 1:

On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q5. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Q6. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q7. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier que :

$$\exists \rho > 0,\quad \forall \lambda \in \left]0, \rho\right[,\quad M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q8. Application

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que les matrices $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique.

À l'aide des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.

Q9. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

On rappelle que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est une partie connexe par arcs.

Exercice 2:

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

1.1. Étude de la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

1.1.1. Justifier que si $\alpha \neq \beta$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.2. Montrer que si $\alpha = \beta$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.2. Calcul de la probabilité qu'une matrice aléatoire soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette section, X et Y désignent deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant une loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2, avec $(p_1, p_2) \in]0,1[^2$; c'est-à-dire

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2).$$

1.2.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, rappeler l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de k et p_1.

1.2.2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = X + Y$ selon les valeurs des paramètres p_1 et p_2. *On précisera d'abord l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire U.*

1.2.3. Montrer que la variable aléatoire $V = \min(X, Y)$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$. *On pourra commencer par calculer $\mathbb{P}(V > k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.*

1.2.4. Montrer que $\mathbb{P}(X < Y) = \dfrac{p_1(1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$.

1.2.5. On considère la variable aléatoire discrete $M : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\forall\, w \in \Omega, \quad M(w) = \begin{pmatrix} X(w) & 1 \\ 0 & Y(w) \end{pmatrix}.$$

Calculer, en fonction des paramètres p_1 et p_2, la probabilité que la matrice M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3:

On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

1. Quelques propriétés de la fonction F

1.1. Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.

1.2. Montrer que la fonction F admet un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et le déterminer.

2. Étude de la nature du point critique (x_0, y_0)

2.1. Calculer les dérivées partielles secondes de F au point (x_0, y_0).

2.2. À l'aide de la matrice Hessienne, montrer que la fonction F présente un extremum local au point (x_0, y_0). Est-ce un minimum ou un maximum local ?

3. Étude plus approfondie de l'extremum en question

3.1. Soit$(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on pose $u = x$ et $v = y - 3$. Vérifier que $F(x, y) = u^2 + uv + v^2 - 9$.

3.2. Montrer qu'en fait la fonction F présente un extremum absolu strict au point (x_0, y_0).
On pourra remarquer que

$$\forall\, (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad u^2 + uv + v^2 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4}.$$

Mini Problème 1:

Dans ce problème, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; on note $(\mathscr{L}_f)$ l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f. \qquad (\mathscr{L}_f)$$

Si $x_0 \in I$, on définit la fonction $\varphi_{f,x_0} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in I, \quad \varphi_{f,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles.*

1.1. Montrer que l'ensemble Σ_0 des solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y''+y=0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

1.2. Recherche d'une solution particulière de $(\mathscr{L}_f)$

Pour tout $x \in I$, on pose $\quad \varphi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \varphi_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t.$

1.2.1. Justifier que les fonctions φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I et exprimer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in I$.

1.2.2. Montrer que, pour tout $x \in I$, $\quad \varphi_{f,x_0}(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$. Que vaut $\varphi_{f,x_0}(x_0)$?

1.2.3. En déduire que φ_{f,x_0} est dérivable sur I et exprimer $\varphi_{f,x_0}'(x)$ pour tout $x \in I$. Que vaut $\varphi_{f,x_0}'(x_0)$?

1.2.4. Montrer que φ_{f,x_0} est deux fois dérivable sur I et qu'elle est solution, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

1.2.5. Montrer que φ_{f,x_0} est l'unique solution, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ s'annulant ainsi que sa dérivée en x_0.

1.3. Expression intégrale des solutions de $(\mathscr{L}_f)$

Montrer que les solutions, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t, \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

1.4. Étude de la périodicité des solutions de $(\mathscr{L}_f)$ dans le cas où f est 2π-périodique

Dans cette section, on suppose que $I=\mathbb{R}$ et que f est $2\pi-$périodique.

1.4.1. On suppose que l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ possède une solution 2π-périodique g.

(i) Montrer qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) En déduire que, pour tout réel x, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = 0.$

(iii) Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

1.4.2. On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0.$

(i) Montrer que, pour tout réel x, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = 0.$

(ii) En déduire, d'abord que $\varphi_{f,0}$ est 2π-périodique, puis justifier qu'il en est de même de toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

1.4.3. Si f est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ possède-t-elle des solutions 2π-périodiques ?

Mini Problème 2:

On rappelle que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est muni de la norme* $\|.\|_2$ *associée au produit scalaire* $(A,B) \longmapsto \mathrm{Tr}\,({}^tAB)$ *et que*

$$\forall\,(M,N) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2, \quad \mathrm{Tr}\,(MN) = \mathrm{Tr}\,(NM).$$

3.1. On rappelle que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \Big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ {}^tMM = I_n\Big\}$.

3.1.1. Montrer que l'application $M \longmapsto {}^tM$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est continue.

3.1.2. Montrer que l'application $M \longmapsto {}^tMM$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est continue.

3.1.3. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et on cherche à calculer la distance*

$$d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|_2.$$

3.2. Justifier que cette borne inférieure est atteinte.

3.3. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|\Omega A\|_2 = \|A\Omega\|_2 = \|A\|_2$.

3.4. Soient $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *symétrique et positive* telles que $A = OS$.

3.4.1. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\|_2 = \|S - O^{-1}\Omega\|_2$ et en déduire que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

3.4.2. On note D une matrice diagonale et P une matrice orthogonale telles que $S = PDP^{-1}$. Justifier l'existence des matrices D et P puis montrer que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

3.5. On conserve les notations de la question **3.4.** précédente et on pose $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

3.5.1. Justifier que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont $\geqslant 0$.

3.5.2. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}\,(D\Omega) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

3.5.3. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D - \Omega\|_2^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - 2\mathrm{Tr}\,(D\Omega) + n$.

3.5.4. Conclure que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|_2$ puis que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - O\|_2$.

3.6. Application

Calculer $d(C, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$ où C est la matrice définie par $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

FiN

Corrigé

Exercice 1 (CCP 2020):

Q5. $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas fermé dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$, car la suite $\left(\dfrac{1}{k}I_n\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a pour limite la matrice nulle qui n'est pas dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (on a utilisé la caractérisation séquentielle des fermés).

Q6. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par l'application déterminant, qui est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}$ (complémentaire du fermé $\{0\}$), donc $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q7. Si le polynôme caractéristique χ_M possède une racine strictement positive, on note ρ la plus petite de ces racines (un tel minimum existe bien car l'ensemble des racines est fini) ; sinon on pose $\rho = 1$.
Ainsi, $\boxed{\rho > 0}$ et le polynôme caractéristique χ_M n'a pas de racine dans l'intervalle $]0, \rho[$, d'où :

$$\boxed{\forall \lambda \in \,]0,\rho[}, \quad \det(M - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_M(\lambda) \neq 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}.$$

La suite $\left(M - \dfrac{\rho}{k} I_n\right)_{k\geqslant 2}$ est alors à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et converge vers M, matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q8. Si $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, les matrices AB et BA sont semblables car $AB = B^{-1}(BA)B$, donc elles ont le même polynôme caractéristique.
Considérons les applications φ_1 et $\varphi_2 \in \mathscr{F}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X])$ définies par $\varphi_1(B) = \chi_{AB}$ et $\varphi_2(B) = \chi_{BA}$ (la matrice A étant fixée et quelconque dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).
Nous venons de voir que φ_1 et φ_2 coïncident sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
D'autre part, φ_1 est continue, par composition de l'application $B \mapsto AB$, continue car linéaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, avec $M \mapsto \chi_M$ qui est aussi continue par caractérisation à l'aide des coordonnées dans une base, car les coefficients du polynôme caractéristique de M sont polynomiaux en les coefficients de M. De même, φ_2 est continue.
Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que φ_1 et φ_2 coïncident sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\boxed{\text{les polynômes caractéristiques de } AB \text{ et } BA \text{ sont égaux}}$ quelles que soient les matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour les matrices élémentaires A et B données dans l'énoncé, $AB = 0$ a pour polynôme minimal X, tandis que $BA = B$ n'a pas pour polynôme minimal X car cette matrice est non nulle (son polynôme minimal est en fait égal à X^2), donc $\boxed{\text{le résultat précédent n'est pas vrai pour les polynômes minimaux}}$.

Q9. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
Son image par l'application déterminant, qui est continue, est alors connexe par arcs.
Or cette image est égale à $\mathbb{R}^*$: l'inclusion directe est évidente et l'inclusion réciproque s'obtient en prenant pour antécédent d'un réel x non nul la matrice $\mathrm{diag}(x, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^*$ n'étant pas connexe par arcs puisque ce n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ (par exemple, $(-1, 1) \in (\mathbb{R}^*)^2$ mais $[-1, 1] \not\subset \mathbb{R}^*$), on obtient ainsi une contradiction et on en déduit que $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas connexe par arcs}}$.

Exercice 2 (CNC 2023)

1.1. Étude de la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1.1.1. Si $\alpha \neq \beta$, la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes. Par suite

$$A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

1.1.2. Si $\alpha = \beta$, la matrice A admet α comme seule valeur propre d'ordre de multiplicité 2. Puisque La matrice $A - \alpha I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, le théorème de rang montre que $\dim \operatorname{Ker}(A - \alpha I_2) = 1 \neq 2$ (ordre de multiplicité de la valeur propre α). Ainsi A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

NB— *On pourra raisonner par l'absurde en supposant que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Avec α comme seule valeur propre, la matrice A serait semblable à la matrice αI_2, et donc $A = \alpha I_2$, ce qui est absurde.*

1.2. **Calcul de la probabilité qu'une matrice aléatoire soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**

1.2.1. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$, donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* : \quad \mathbb{P}(X = k) = p_1 q_1^{k-1}$ où $q_1 = 1 - p_1$.

1.2.2. On sait que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $U(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Pour tout entier $k \geqslant 2$, écrivons que $(U = k) = \bigsqcup_{i=1}^{k-1} (X = i, Y = k - i)$ (réunion incompatible d'événements), donc

$$\mathbb{P}(U = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = i, Y = k - i). \qquad (*)$$

Or les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, donc en posant $q_j = 1 - p_j$ où $j \in \{1, 2\}$, on obtient

$$\mathbb{P}(X = i, Y = k - i) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i) = p_1 q_1^{i-1} p_2 q_2^{k-i-1} = p_1 p_2 q_2^{k-2} \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{i-1}.$$

Ainsi la somme définie dans la relation $(*)$ est géométrique de raison $\frac{q_1}{q_2}$.

- Si $p_1 = p_2$, alors $\frac{q_1}{q_2} = 1$ puis $\mathbb{P}(X = i, Y = k - i) = p_1^2 q_1^{k-2}$, ainsi

$$\mathbb{P}(U = k) = p_1^2 \sum_{i=1}^{k-1} q_1^{k-2} = (k - 1) p_1^2 q_1^{k-2}.$$

- Si $p_1 \neq p_2$, alors $\frac{q_1}{q_2} \neq 1$, puis $\mathbb{P}(U = k) = p_1 p_2 q_2^{k-2} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{i-1} = p_1 p_2 q_2^{k-2} \dfrac{1 - \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{k-1}}{1 - \frac{q_1}{q_2}}$, ainsi

$$\mathbb{P}(U = k) = p_1 p_2 \frac{q_2^{k-1} - q_1^{k-1}}{q_2 - q_1}.$$

1.2.3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Notons que

$$(V > k) = (X > k) \cap (Y > k).$$

Par indépendance des variables aléatoires X et Y, on obtient

$$\mathbb{P}(V > k) = \mathbb{P}(X > k)\,\mathbb{P}(Y > k).$$

Or, $(X > k) = \displaystyle\bigsqcup_{i=k+1}^{+\infty} (X = i)$, donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) = p_1 \sum_{i=k+1}^{+\infty} q_1^{i-1} = \frac{p_1 q_1^k}{1 - q_1} = q_1^k}\,. \tag{1}$$

De même, $\boxed{\mathbb{P}(Y > k) = q_2^k}$, par suite

$$\boxed{\mathbb{P}(V > k) = (q_1 q_2)^k}\,.$$

Notons au passage que cette formule est aussi valable pour $k = 0$ puisque $(V > 0) = \Omega$, et donc $\mathbb{P}(V > 0) = 1 = (q_1 q_2)^0$.
Par ailleurs, $(V = k) = (V > k-1) \setminus (V > k)$ et $(V > k) \subset (V > k-1)$, donc

$$\boxed{\mathbb{P}(V = k) = \mathbb{P}(V > k-1) - \mathbb{P}(V > k) = (q_1 q_2)^{k-1} - (q_1 q_2)^k = (q_1 q_2)^{k-1}(1 - q_2 q_2)}\,.$$

On en déduit que $\boxed{V \text{ suit une loi géométrique de paramètre } 1 - q_1 q_2}$.

1.2.4. Écrivons que $(X > Y) = \displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} (X > k, Y = k)$, c'est une réunion incompatible d'événements, donc

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k, Y = k).$$

Par indépendance des variables aléatoires X et Y, on aura

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)\,\mathbb{P}(Y = k).$$

En utilisant la formule (1) obtenue en 1.2.3., on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} q_1^k p_2 q_2^{k-1} = p_2 q_1 \sum_{k=1}^{+\infty} (q_1 q_2)^{k-1} = \frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2} = \frac{p_2(1 - p_1)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}}\,.$$

1.2.5. Notons tout d'abord que l'étude faite en 1.1. montre que la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq \beta$. Si on considère l'événement

$$D : \text{« la matrice aléatoire } M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable »},$$

alors $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(X \neq Y)$. Or, $(X \neq Y) = (X > Y) \sqcup (Y > X)$, donc par incompatibilité des événements $(X > Y)$ et $(Y > X)$, on a

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(Y > X). \tag{2}$$

En vertu du résultat obtenu en 1.2.4., on a

$$\boxed{\mathbb{P}(X > Y) = \frac{p_2(1 - p_1)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{P}(Y > X) = \frac{p_1(1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}} \text{ (par symétrie).}$$

On déduit de (2) que

$$\boxed{\mathbb{P}(D) = \frac{p_2(1 - p_1) + p_1(1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} = \frac{p_1 + p_2 - 2p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}}\,.$$

Exercice 3 (CNC 2023)

On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

1. Quelques propriétés de la fonction F

1.1 F est une fonction polynomiale donc elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y - 6$$

1.2 (x_0, y_0) est un point critique de F si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 - 3 \ = 0 \\ x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases}$$

ce système admet une solution unique $(x_0, y_0) = (0,3)$, qui est l'unique point critique de F. .

2. Étude de la nature du point critique (x_0, y_0)

2.1 On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

2.2 La matrice Hessienne de F au point (x_0, y_0) s'écrit

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 3$ dont les racines sont $\{1,3\}$.
$H_f(x_0,y_0)$ est symétrique réelle et admet deux valeurs propres strictement positives , elle est donc symétrique définie et positive , par suite (x_0, y_0) est un minimum local.

3. Étude plus approfondie de l'extremum en question

3.1 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; on pose $u = x$ et $v = y - 3$ donc $x = u$ et $y = v + 3$, on remplace dans F

$$\begin{aligned} F(x,y) &= u^2 + u(v+3) + (v+3)^2 - 3u - 6(v+3) \\ &= u^2 + uv + 3u + v^2 + 6v + 9 - 3u - 6v - 18 \\ &= u^2 + uv + v^2 - 9 \end{aligned}$$

3.2 On a $F(x_0,y_0) = -9$ donc

$$\begin{aligned} F(x,y) - F(x_0,y_0) &= u^2 + uv + v^2 \\ &= \left(u^2 + 2.u\frac{v}{2} + \frac{v^2}{4}\right) + \frac{3v^2}{4} \\ &= \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4} \end{aligned}$$

par suite $F(x,y) - F(x_0,y_0) \geq 0$ pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, cette inégalité est stricte si $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ donc F présente un minimum absolu strict au point (x_0,y_0).

Mini Problème 1 (CNC 2023)

I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; on note $(\mathscr{L}_f)$ l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f$$

$1^{\text{ère}}$ Partie

Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ Application au cas où f est 2π-périodiques .

1.1 Σ_0 est une partie non vide de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, $0 \in \Sigma_0$, stable par combinaison linéaire (*simple à vérifier*) , donc c'est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

Les solutions réelles de cette équation , linéaire homogène de second ordre, sont de la forme

$$y : x \mapsto a\cos x + b\sin x$$

donc Σ_0 est de dimension 2 dont une base est la famille $(\cos, \sin)$.

1.2 Recherche d'une solution particulière de $(\mathscr{L}_f)$

Pour tout $x \in I$, on pose $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\cos t \ dt$ et $\varphi_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\sin t \ \mathrm{d}t$.

1.2.1 f est continue sur I donc les fonctions $t \mapsto f(t)\cos t$ et $t \mapsto f(t)\sin t$ sont continues , par suite φ_1 et φ_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $\varphi_1'(x) = f(t)\cos t$ et $\varphi_2'(x) = f(t)\sin t$ pour tout $x \in I$.

1.2.2 Soit $x \in I$,on a

$$\begin{aligned}
\varphi_{f,x_0}(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x} f(t)(\sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)\mathrm{d}t \\
&= \sin(x)\int_{x_0}^{x} f(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_{x_0}^{x} f(t)\sin(t)dt \\
&= \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{f,x_0}(x_0) = 0$.

1.2.3 φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I donc φ_{f,x_0} l'est aussi et

$$\begin{aligned}
\varphi'_{f,x_0}(x) &= \varphi_1'(x)\sin x + \varphi_1(x)\cos x - \varphi_2'(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x \\
&= f(x)\cos x.\sin x \ + \varphi_1(x)\cos x - \ f(t)\cos .x\sin x + \varphi_2(x)\sin x \\
&= \varphi_1(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi'_{f,x_0}(x_0) = 0$.

1.2.4 φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I donc φ'_{f,x_0} est dérivable sur I par suite φ_{f,x_0} est deux fois dérivable sur I et

$$\begin{aligned}\varphi''_{f,x_0}(x) &= \varphi'_1(x)\cos x - \varphi_1(x)\sin x + \varphi'_2(x)\sin x + \varphi_2(x)\cos x \\ &= f(x)\cos^2 x \ - \varphi_1(x)\sin x + \ f(t)\sin^2 x + \varphi_2(x)\cos x \\ &= f(x) + \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x \\ &= -\varphi_{f,x_0}(x) + f(x)\end{aligned}$$

ainsi φ_{f,x_0} est solution, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$

1.2.5 Soit ψ une solution de $(\mathscr{L}_f)$ telle que $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = 0$, posons $Y = \psi - \varphi_{f,x_0}$, alors elle vérifie $Y'' + Y = 0$ et il existe a et b tel que $y(x) = a\cos x + b\sin x$ de plus on a $Y(x_0) = Y'(x_0) = 0$ donc

$$\begin{cases} a\cos x_0 + b\sin x_0 = 0 \\ -a\sin x_0 + b\cos x_0 = 0 \end{cases}$$

le déterminant de ce système est égale 1 , sa matrice est inversible il admet donc une unique solution et $a = b = 0$ d'où $Y = 0$ et $\psi = \varphi_{f,x_0}$.
Ainsi φ_{f,x_0} est l'unique solution, sur I, du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + y = f \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

1.3. De la même façon , si ψ une solution de $(\mathscr{L}_f)$ sur I, alors $y = \psi - \varphi_{f,x_0}$ vérifie $y'' + y = 0$, donc il existe a et b tel que $y(x) = a\cos x + b\sin x$, d'où

$$\psi(x) = a\cos x + b\sin x + \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

ce qui donne le résultat.

1.4. On suppose que $I = R$ et que f est 2π-périodique.

1.4.1. Soit g une solution 2π-périodique de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

i) D'après 1.3 avec $x_0 = 0$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

ii) Soit x un réel , on a $g(x) = g(x+2\pi)$ donc

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x+2\pi-t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

la relation de Chasles donne $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0.$

iii) En particulier
$\to$ Si $x = 0$ alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0.$
$\to$ Si $x = \dfrac{\pi}{2}$ alors

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\sin(\frac{\pi}{2} - t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0.$$

écrivons

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t.$$

un changement de variable $t = u + 2\pi$ donne

$$\int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u+2\pi)\cos(u+2\pi)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\cos(u)\mathrm{d}u.$$

d'où

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$$

1.4.2. On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\ \mathrm{d}t = 0.$

i) Soit x un réel , on a

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_x^0 f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$$

le changement de variable $t = u + 2\pi$ donne $\int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$, donc

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

d'autre part

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \sin(x)\underbrace{\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)dt}_{=0} - \cos(x)\underbrace{\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)dt}_{=0} = 0$$

d'où

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ii) On a $\varphi_{f,0}(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$ et

$$\begin{aligned}
\varphi_{f,0}(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

d'après i) $\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$ donc $\varphi_{f,0}(x+2\pi) = \varphi_{f,0}(x)$ et $\varphi_{f,0}$ est 2π-périodique.
Soit g une solution de $(\mathscr{L}_f)$, il existe λ et μ tels que

$$\begin{aligned}
g(x) &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \\
&= \lambda\cos x + \mu\sin x + \varphi_{f,0}(x)
\end{aligned}$$

$\varphi_{f,0}$, cos et sin sont 2π-périodiques donc g est 2π-périodique .

1.4.3. Si $f\ (x) = \sin(x)$, les solutions de $(\mathscr{L}_f)$ sont de la forme
$g : x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + \varphi_{f,0}(x)$ avec

$$\begin{aligned}
\varphi_{f,0}(x) &= \int_0^x \sin(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \\
&= \sin(x)\int_0^x \sin(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_0^x \sin^2(t)dt
\end{aligned}$$

on a

$$\int_0^x \sin(t)\cos(t)dt = \frac{1}{2}\sin^2(x)$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin^2(t)dt &= \int_0^x \frac{1-\cos(2x)}{2}dt \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x
\end{aligned}$$

ainsi

$$\varphi_{f,0}(x) = \frac{1}{2}\sin^3(x) - \cos(x)(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x)$$

$\varphi_{f,0}$ n'est pas $2\pi-$périodique donc l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ n'admet pas de solution 2π-périodique.

3.1. On rappelle que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = \mathrm{I}_n\right\}$.

3.1.1. L'application $f\colon M \mapsto {}^tM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc f est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.1.2. L'application identité $\mathrm{I}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est visiblement continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car elle est lipschitzienne. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant une $\mathbb{R}$-algèbre, donc l'application $g = f\,\mathrm{I}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\colon M \mapsto {}^tMM$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que produit de deux applications continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

NB. — *On pourra raisonner autrement en remarquant que l'application $M \mapsto {}^tMM$ est le composé des deux applications : $M \mapsto \left({}^tM, M\right)$ et $(M, N) \mapsto MN$. La première application est linéaire et la deuxième est bilinéaire. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, elles sont continues ainsi que leur composé.*

3.1.3. Notons tout d'abord que la notion de partie fermée et bornée ne dépend pas de la norme choisie sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Il est clair que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = g^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{\mathrm{I}_n\}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (singleton) par l'application continue g.
• Pour toute matrice $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}\left({}^tMM\right) = \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n) = n$, donc $\|M\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^tMM\right)} = \sqrt{n}$. Ainsi $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \inf\limits_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|_2$.

L'application $h\colon M \mapsto \|A - M\|_2$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que composé de deux applications continues à savoir l'application norme $M \mapsto \|M\|_2$ et l'application lipschitzienne $M \mapsto A - M$. L'application continue h étant à valeurs réelles et d'après 3.1., $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, on en déduit que h est bornée et atteint sa borne inférieure sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

3.3. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc ${}^t\Omega\,\Omega = \Omega\,{}^t\Omega = \mathrm{I}_n$. En utilisant le fait que l'application trace Tr vérifie

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \quad \mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM),$$

on obtient

- $\|\Omega A\|_2^2 = \mathrm{Tr}\left({}^t(\Omega A)(\Omega A)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tA\,{}^t\Omega\,\Omega A\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tAA\right) = \|A\|_2^2$.
- $\|A\Omega\|_2^2 = \mathrm{Tr}\left({}^t(A\Omega)(A\Omega)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t\Omega\,{}^tAA\Omega\right) = \mathrm{Tr}\left(\Omega\,{}^t\Omega\,{}^tAA\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tAA\right) = \|A\|_2^2$.

3.4. Soient $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(R)$ telles que $A = OS$.

3.4.1. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Comme $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, le résultat établi en 3.3. montre que

$$\|A - \Omega\|_2 = \|OS - \Omega\|_2 = \|O\left(S - O^{-1}\Omega\right)\|_2 = \|S - O^{-1}\Omega\|_2. \tag{4}$$

L'application $\Omega \mapsto O^{-1}\Omega$ est visiblement bijective (au fait c'est l'application translation à gauche dans le groupe $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$), donc

$$d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \inf_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|A - \Omega\|_2 = \inf_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - O^{-1}\Omega\|_2 = \inf_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - \mathcal{U}\|_2 = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})).$$

3.4.2. Le théorème spectral appliqué à la matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ assure qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$. D'après 3.3., il est facile de voir que

$$\forall (M, \Omega) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) : \quad \|\Omega M \Omega^{-1}\|_2 = \|M\|_2.$$

Ainsi,

$$\|S - \Omega\|_2 = \|PDP^{-1} - \Omega\|_2 = \|P\left(D - P^{-1}\Omega P\right)P^{-1}\|_2 = \|D - P^{-1}\Omega P\|_2. \tag{5}$$

Or, l'application $\Omega \mapsto P^{-1}\Omega P$ est visiblement bijective (au fait c'est l'automorphisme intérieur du groupe $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ associé à la matrice orthogonale P). Par suite

$$d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \inf_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - \Omega\|_2 = \inf_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|D - P^{-1}\Omega P\|_2 = \inf_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|D - \mathcal{U}\|_2 = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})).$$

Le résultat obtenu en 3.4.1. permet de conclure que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

3.5. On conserve les notations de la question 3.4. précédente et on pose $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

3.5.1. On sait que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc les valeurs propres de la matrice S sont positives en vertu du résultat établi en 1.3.1.. Or S et D sont semblables, donc $\mathrm{sp}(S) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$.

3.5.2. Soit $\Omega = (\omega_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, on a

$$(D\Omega)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} D_{i,k}\Omega_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{i,k} \omega_{k,j} = \lambda_i \omega_{i,j}.$$

Par suite,

$$\mathrm{Tr}(D\Omega) = \sum_{k=1}^{n} (D\Omega)_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega_{k,k}$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \geqslant 0$ et $|\omega_{k,k}| \leqslant 1$ puisque les vecteurs colonnes de Ω sont unitaires, on en déduit que

$$\boxed{\mathrm{Tr}(D\Omega) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.}$$

3.5.3. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. En utilisant le résultat de la question 3.3., on a

$$\|D - \Omega\|_2 = \|\Omega\left(\Omega^{-1}D - \mathrm{I}_n\right)\|_2 = \|\Omega^{-1}D - \mathrm{I}_n\|_2,$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \boxed{\|D - \Omega\|_2^2} &= \left\|\Omega^{-1}D\right\|_2^2 - 2\,\varphi\left(\Omega^{-1}D, \mathrm{I}_n\right) + \|\mathrm{I}_n\|_2^2\,. \\ &= \|D\|_2^2 - 2\mathrm{Tr}\left({}^t\left(\Omega^{-1}D\right)\mathrm{I}_n\right) + \|\mathrm{I}_n\|_2^2 \\ &= \boxed{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - 2\mathrm{Tr}\left(D\Omega\right) + n} \end{aligned}$$

3.5.4. En vertu des résultats obtenus en 3.5.2. et 3.5.3., pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|D - \Omega\|_2^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k + n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - 1)^2 = \|D - \mathrm{I}_n\|_2^2,$$

par suite $d\left(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) \geqslant \|D - \mathrm{I}_n\|_2$. Puisque $\mathrm{I}_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, cette distance est atteinte en I_n de sorte que $\boxed{d\left(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = \|D - \mathrm{I}_n\|_2}$.

En prenant successivement $\Omega = O$ et $\Omega = \mathrm{I}_n$ dans les formules (4) et (5) établies aux questions 3.4.1. et 3.4.2., on obtient que $\|A - O\|_2 = \|S - \mathrm{I}_n\|_2$ puis $\|S - \mathrm{I}_n\|_2 = \|D - \mathrm{I}_n\|_2$, par suite $\|D - \mathrm{I}_n\|_2 = \|A - O\|_2$. On en déduit que $d\left(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = \|A - O\|_2$. Le résultat de 3.4.2. permet alors de conclure que $\boxed{d\left(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = \|A - O\|_2}$.

3.6. Posons $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. En utilisant le résultat de l'application 2.3. de la deuxième partie concernant la décomposition polaire de la matrice $-C$, il s'en suit que $C = OS$ où les matrices $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ sont définies par :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant le résultat obtenu en 3.5., on a $d\left(C, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = \|C - O\|_2$, avec

$$C - O = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Or, $\|C - O\|_2 = \sqrt{9} = 3$, on en déduit que $\boxed{d\left(C, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = 3}$.