PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA · LÉON L'AFRICAIN
PRÉPAS MP

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مموني مولاي اسماعيل

Concours Blanc

Analyse & Probas

Durée : heures

Exercice 1

Trouver les points critiques et discuter leur nature pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

a) $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$

b) $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k) = p\, q^k$$

où $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi des lois de probabilité.

2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et la calculer.

3. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$ et $\mathbb{P}(X<Y)$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X+Y$.

Exercice 3

Partie A

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Partie B

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.

2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

Partie C

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$2xy' - 3y = 0 \qquad (H)$

$2xy' - 3y = \sqrt{x} \qquad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0,+\infty[$?

Problème : Théorème du point fixe et applications

Le but de ce problème est de démontrer le théorème du point fixe de Picard, ce qui fait l'objet de la partie I, et d'en voir plusieurs applications élémentaires dans les parties suivantes. Les parties II, III et IV sont indépendantes entre elles.

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé.

Une définition. Soit $k \in [0;1[$. On dira qu'une application $f : E \to E$ est une **contraction stricte** de rapport k lorsque pour tout $(x,y) \in E^2$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k \|x - y\| .$$

Une notation. Pour n entier naturel et $f : E \to E$, on notera $f^n : E \to E$ l'application définie par :

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois la fonction } f}(x) \quad \text{avec la convention} \quad f^0 = \mathrm{Id}.$$

Partie I : Le théorème du point fixe de Picard

Dans cette partie $(E, \| \ \|)$ est un espace de Banach et $f : E \to E$ est une contraction stricte de rapport k.
Pour $a \in E$ on considère la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n entier naturel.

1. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = x_{n+1} - x_n$.
   (a) Démontrer que pour tout n entier naturel, on a $\|u_{n+1}\| \leqslant k \|u_n\|$ puis que
   $$\|u_n\| \leqslant k^n \|f(a) - a\| .$$
   En déduire que la série $\sum u_n$ converge.
   (b) Démontrer alors que la suite (x_n) converge vers un vecteur ℓ de E.
   (c) Prouver que ℓ est un point fixe de f c'est-à-dire que $f(\ell) = \ell$.
   (d) Démontrer que f admet en fait un unique point fixe.

On vient donc de démontrer le résultat suivant :

<u>Théorème du point fixe de Picard</u> : Dans un espace de Banach $(E, \| \ \|)$, une application $f : E \to E$ qui est une contraction stricte admet un unique point fixe et pour tout a dans E la suite des itérés $(f^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe.