Contrôle

Séries Entieres

Durée : 2 heures

Problème : séries de Taylor et développement en série entière

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie préliminaire

Dans cette partie, les questions sont indépendantes les unes des autres et leurs résultats peuvent être admis dans la suite du problème.

1. Justifier, pour tout réel $x \in]-1,1[$, l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1}$ et donner sa valeur.

2. On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout réel $x \in]0,+\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t \,.$$

   Démontrer que pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\Gamma(n)$.

3. Démontrer la formule de Taylor avec reste de Laplace (ou reste intégral) :
   si I est un intervalle contenant le réel a, si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I, alors pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t \,.$$

On rappelle le theoreme suivant :

Si une fonction f admet un développement en série entière sur l'intervalle $]-a,a[$, alors :

- la fonction f est de classe C^∞ sur $]-a,a[$,
- son développement en série entière est unique et est donné par la série de Taylor de la fonction f à l'origine :

$$\text{pour tout réel } x \in]-a,a[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \,.$$

I. Quelques exemples d'utilisation de ce théorème

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et pour tout réel } x \neq 0 \ , \ f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5. Expliciter une fonction f de classe C^∞ sur un voisinage de 0 et vérifiant, pour tout entier naturel n, l'égalité $f^{(n)}(0) = n.n!$

6. Un théorème des moments
Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 1$:

$$\forall x \in]-R, R[\,, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \ .$$

On suppose, que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$.
L'objectif de cette question est de montrer que f est identiquement nulle sur $]-R, R[$.

(a) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 1]$.

(b) A l'aide du calcul de $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x$, démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$.

(c) Démontrer que f est la fonction nulle sur l'intervalle $]-R, R[$.

II. Contre-exemples

7. Donner un exemple de fonction f à la fois de classe C^∞ sur un intervalle I et développable en série entière au voisinage de l'origine, mais qui ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur I tout entier.

8. Un exemple de fonction ne coïncidant avec sa série de Taylor en 0 sur aucun voisinage de 0
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $f(0) = 0$.

(a) Donner, à l'aide de la calculatrice (sans étude), l'allure de la courbe de la fonction f.

(b) Par les théorèmes généraux, la fonction f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

(c) Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ avec pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(0) = 0$.
Par parité, la fonction f ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(d) La fonction f est-elle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$?

Corrigé

CCP 2013

Problème : séries de Taylor et développements en série entière.

1. On a $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ pour $x\in]-1,1[$ et, par dérivation terme à terme d'une série entière dans l'intervalle ouvert de convergence, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ pour tout $x\in]-1,1[$. $\square$

2. Une intégration par parties (bien licite) fournit $\displaystyle\int_\varepsilon^A e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{x}\left[e^{-t}t^x\right]_\varepsilon^A+\frac{1}{x}\int_\varepsilon^A e^{-t}t^x\,\mathrm{d}\,t \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Pour $x>0$, lorsque $(\varepsilon,A)\to(0,+\infty)$ les deux intégrales tendent respectivement vers $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ et, par croissances comparées, le terme tout intégré tend vers 0.
Il en découle que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ pour tout $x>0$. $\square$
Comme $\Gamma(1)=1$, une itération claire montre que $\Gamma(n)=(n-1)!$ pour tout entier n non nul. $\square$

3. Fixons $x\in I$ ainsi que $n\in\mathbb{N}$ et considérons la fonction φ définie sur I par $\varphi(t)=f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(x-t)^k}{k!}f^{(k)}(t)$.
φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc en particulier $\mathcal{C}^1$ et le théorème de représentation intégrale des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ fournit $\varphi(x)-\varphi(a)=\displaystyle\int_a^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t$.

Or $\varphi(x)=0$, $\varphi(a)=f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$ et $\varphi'(t)=-\dfrac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)$ d'où la formule. $\square$

4. Pour $x\neq 0$ il vient $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ de par le développement en série entière de sin. Or cette égalité est encore vraie en 0. Ainsi f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori de classe $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

5. D'après la question 1, on a $g(x)\underset{\text{DEF}}{=}\dfrac{x}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^n$ pour tout $x\in]-1,1[$.
Ainsi g est développable en série entière sur $]-1,1[$ et vérifie $g^{(n)}(0)=n.n!$ $\square$

6. **(a)** Notons $u_n(x)=f(x)\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Il vient $|u_n(x)|\leqslant M\dfrac{|f^{(n)}(0)|}{n!}\underset{\text{DEF}}{=}a_n$ en notant $M=\operatorname*{Sup}\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$ qui existe bien puisque f est $\mathcal{C}^\infty$ donc en particulier continue sur $]-R,R[$ donc sur le compact $[0,1]$ puisque $R>1$.
Or la série $\sum\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge absolument dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$ donc en particulier en 1 puisque $R>1$ ce qui prouve que la série $\sum a_n$ converge.
Ainsi $\sum u_n(x)$ converge bien normalement sur $[0,1]$ $\square$

(b) Pour tout x de $]-R,R[$ donc de $[0,1]$ on a $f^2(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ et comme la série converge normalement (donc a fortiori uniformément) sur $[0,1]$ on peut intégrer terme à terme entre 0 et 1. Il en résulte que $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x=0$.
Or f^2 est positive et continue sur $[0,1]$. Il en résulte que f^2 donc f est nulle sur $[0,1]$. $\square$

(c) Il en découle, pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x)=0$.
Or, comme f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, $f^{(n)}$ est en particulier continue en 0.
De sorte que $f^{(n)}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x)=0$ pour tout entier n et ainsi f est bien nulle sur $]-R,R[$. $\square$

7. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais son développement en série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ ne converge que sur $]-1,1[$. $\square$

8. (b) Soit le prédicat $\mathcal{P}_n$: « $\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \quad$ t.q. $\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) \quad \forall x \in]0, +\infty[$ »

$\mathcal{P}_0$ est vrai et en supposant $\mathcal{P}_k$ vrai jusqu'au rang n, il vient pour $x > 0$:

$f^{(n+1)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)\right) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}} \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$ avec $P_{n+1} = X^3 P_n' + (2 - 3nX^2)P_n \in \mathbb{R}[X]$

ce qui établit bien la validité de $\mathcal{P}_{n+1}$. $\square$

c) f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Pour prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n, il suffit d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ itéré de prouver (compte-tenu en outre de la parité) que $\lim\limits_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout entier n.

Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{u \to +\infty} u^{3n} e^{-u^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^{3n}} \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = 0$.

Par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0^+} P_n(x) = P_n(0) \in \mathbb{R}$ et ainsi on a bien $\lim\limits_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout entier n. $\square$

d) S'il existait un réel $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r, r[$, la fonction f serait nulle sur $]-r, r[$ d'après la question précédente. Ce qui n'est pas puisque $f(\frac{r}{2}) > 0$. $\square$

9. a) Notons $g(x, t) = \dfrac{e^{-t}}{1 + x^2 t}$.

$t \longmapsto g(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ pour tout réel x donc localement intégrable et $|g(x, t)| \leqslant e^{-t}$ intégrable sur $[0, +\infty[$. Il en découle que $t \longmapsto g(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout réel x.

Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}$. $\square$

Pour établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver que :

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad t \longmapsto g(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

(2) $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad t \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$

(4) $\forall \in]0, +\infty[\quad x \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(5) $\forall a > 0 \quad \exists \varphi_a$ intégrable sur $]0, +\infty[$ telle que $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant \varphi_a(t) \quad \forall x \in [-a, a] \quad \forall t \in]0, +\infty[$

Or (1) vient d'être établi, (2), (3) et (4) sont clairs avec $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \dfrac{-2xte^{-t}}{(1 + x^2 t)^2}$ et pour (5) la fonction $\varphi_a(t) = 2ate^{-t}$ convient (bien intégrable sur $]0, +\infty[$ car continue sur $[0, +\infty[$ et $o(\frac{1}{t^2})$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées). Ainsi f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. $\square$

b) Pour $t > 0$ fixé il vient $g_t(x) \underset{\text{DEF}}{=} \dfrac{e^{-t}}{1 + tx^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n e^{-t} x^{2n}$ pour $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

Il en découle par unicité de développement en série entière (celui de Taylor) que :

$\dfrac{\partial^{2n+1} g}{\partial x^{2n+1}}(0, t) = g_t^{(2n+1)}(0) = 0 \quad$ et $\quad \dfrac{\partial^{2n} g}{\partial x^{2n}}(0, t) = g_t^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)! t^n e^{-t}$. $\square$

Il en résulte (dérivations successives sous le signe intégral admises) que $f^{(2n+1)}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial^{2n+1} g}{\partial x^{2n+1}}(0, t) = 0$ et

$f^{(2n)}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial^{2n} g}{\partial x^{2n}}(0, t) = (-1)^n (2n)! \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}\,t = (-1)^n (2n)! \Gamma(n+1) = (-1)^n (2n)! n!$ $\square$

c) La série de Taylor en 0 de f est donc $\sum (-1)^n n! x^{2n}$ dont le rayon de convergence est 0 par la règle de D'Alembert.

En effet en notant $u_n(x) = (-1)^n n! x^{2n}$, il vient que $\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = (n+1)x^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ si $x \neq 0$ donc $\sum u_n(x)$ diverge pour $x \neq 0$.

Ainsi f n'est pas développable en série entière à l'origine. $\square$

10. a) Soit $x \in]-a, a[$. Pour prouver que f développable en série entière sur $]-a, a[$, il suffit de prouver que $|R_n(x)| \underset{\text{DEF}}{=} |f(x) - S_n(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ avec $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Or $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t$ par la formule de Taylor de sorte que

$$|R_n(x)| \leqslant \left|\int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)|\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant M \left|\int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}\,\mathrm{d}\,t\right| = M \left|\int_0^x \frac{|u|^n}{n!}\,\mathrm{d}\,u\right| = M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \square$$

b) Ce résultat s'applique sur $\mathbb{R}$ pour les fonctions sin et cos par exemple. $\square$

FIN