Prof. MAMOUNI
myismail.net

PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA - LÉON L'AFRICAIN

Contrôle (2h : Polynômes

EXERCICE 1 :

Soit $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Dans tout cet exercice, on identifie les éléments de $\mathbb{C}[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(*) \qquad P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1)$$

1. Montrer que si a est racine de P alors $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont aussi des racines de P.

2. Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en posant, pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

   a) Vérifier que lorsque a_0 est une racine de P, pour tout entier naturel n le nombre complexe a_n est une racine de P.

   b) Montrer que lorsque a_0 est un réel > 0, la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite strictement croissante de réels positifs.

   c) En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.

   d) Montrer que -1 n'est pas racine de P.

   e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.

3. Déduire des questions précédentes que si a est une racine complexe de P alors $|a+1| = 1$. On admettra que l'on a aussi $|a-1| = 1$.

4. Montrer que si le degré de P est > 0 alors P a pour unique racine 0.

5. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation $(*)$.

EXERCICE 2 :

On considère le polynôme P tel que : $P(z) = z^3 + az^2 - \overline{a}z - 1$, où a est un nombre complexe.

1. On pose $a = \alpha + i\beta$ $((\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2)$. Discuter, suivant la position dans le plan complexe du point A d'affixe a, le nombre de racines réelles de l'équation $P(z) = 0$, et donner leurs valeurs.

2. Prouver que l'équation $P(z) = 0$ a toujours au moins une racine de module 1.

3. Prouver que, si $a \neq 0$, le module de toute racine de l'équation $P(z) = 0$ est strictement inférieur à $1 + |a|$.

4. Pour la suite, on prend $a = \dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$.

   a) Calculer $a^2, a^3, a^4, \overline{a}, \overline{a}^2, \overline{a}^3, \overline{a}^4$, en les exprimant sous la forme $p + qa$, $(p,q) \in \mathbb{Z}$.

   b) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $P(X)$.

   c) En déduire que si λ complexe est racine de P, $\mu = \lambda^2$ et $\nu = \lambda^4$ le sont aussi.
   En déduire enfin les valeurs de λ, μ, ν.

5. Chercher tous les polynômes Q du troisième degré à coefficients complexes, unitaires, tels que $Q(X^2)$ soit divisible par $Q(X)$.

Corrigé

EXERCICE 1 :

1. Si a est racine de P alors $\mathrm{P}(a)=0$. Avec $(*)$, on a alors

$$\mathrm{P}((a+1)^2-1)=\mathrm{P}(a)\mathrm{P}(a+2)=0 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}((a-1)^2-1)=\mathrm{P}(a-2)\mathrm{P}(a)=0$$

donc $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont racines de P.

2. **a)** On a $a_{n+1}=(a_n+1)^2-1$ et si a_n est racine de P, la question précédente montre qu'il en est de même pour a_{n+1}. Comme on suppose que c'est le cas pour a_0, une récurrence immédiate implique que tous les a_n sont racines de P.

b) On a a_{n+1} qui est >0 quand a_n l'est. Quand $a_0>0$, une récurrence immédiate donne alors que tous les a_n sont >0. On a alors $a_{n+1}-a_n=a_n^2+a_n>0$, et la suite (a_n) croît strictement.

c) Si P admet une racine $a_0>0$ alors, d'après le résultat précédent, les a_n forment une infinité de racines distinctes pour P, ce qui contredit la non nullité du polynôme P (un polynôme non nul n'admet qu'un nombre fini de racines).

d) Si -1 est racine de P alors $(-1-1)^2-1=3$ l'est aussi ce qui est impossible d'après la question précédente. On a donc $\mathrm{P}(-1)\neq 0$.

e) On prouve le résultat par récurrence sur n. Il est vrai pour $n=0$ (car il s'écrit $a_0+1=a_0+1$!). Si on le suppose vérifié àun rang $n\in\mathbb{N}$, on a alors

$$1+a_{n+1}=(1+a_n)^2=((1+a_0)^{2^n})^2=(1+a_0)^{2^{n+1}}$$

ce qui montre le résultat au rang $n+1$ et achève la récurrence.

3. *Première solution :*

Soit a une racine complexe de P. On a alors $(a+1)^{2^n}-1$ qui est, pour tout n, racine de P.

Si, par l'absurde, $|a+1|<1$, la suite de terme général $(a+1)^{2^n}$ est de limite nulle, donc la suite (a_n) a pour limite -1, et, P étant continue, on a alors $\mathrm{P}(-1)=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{P}(a_n)=0$ ce qui est faux. Ainsi, $|a+1|\geqslant 1$.

Si, par l'absurde, $|a+1|>1$ alors $|1+(a+1)^{2^n}|\geqslant|a+1|^{2^n}-1\to+\infty$ et on a donc une suite de racines de P de module de plus en plus grand et donc une infinité de racines ce qui contredit $\mathrm{P}\neq 0$. On a donc aussi $|a+1|\leqslant 1$.

Deuxième solution :

Puisque P n'admet qu'un nombre fini de racines, la suite des nombres $a_n=(a+1)^{2^n}-1$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Il existe donc n,m entiers distincts tels que $(a+1)^{2^n}=(a+1)^{2^m}$. Si l'on suppose $n>m$ par exemple, puisque $a+1\neq 0$ d'après **2.d**, on en déduit $(a+1)^{2^n-2^m}=1$ donc $a+1$ est une racine de l'unité, et, en particulier, $|a+1|=1$.

N.B : La relation $|a-1|=1$ se démontre de la même manière, en considérant cette fois-ci la suite (b_n) définie par $b_0=a$ et par la relation $b_{n+1}=b_n^2-2b_n$.

4. On suppose P non constant. Il admet alors au moins une racine complexe, a. Son image dans le plan complexe doit être sur le cercle de centre $(-1,0)$ de rayon 1 (car $|a+1|=1$)et sur le cercle de centre $(1,0)$ de rayon 1 (car $|a-1|=1$).
On a donc nécessairement $a=0$.

5. – Si P est constant et vérifie $(*)$, alors $\mathrm{P}=\lambda\in\mathbb{C}$ et $\lambda^2=\lambda$, d'où $\mathrm{P}=0$ (exclu) ou $\mathrm{P}=1$.

- Sinon, P est scindé sur $\mathbb{C}$. D'après la question précédente, les seules solution envisageables sont les polynômes du type $P = \lambda X^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \neq 0$.

  Réciproquement, pour $P = \lambda X^d$ avec $\lambda \neq 0$ et $d \in \mathbb{N}^*$, $P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1)$ s'écrit $\lambda(X^2-1)^d = \lambda^2(X^2-1)^d$. Ceci n'a lieu (quand $\lambda \neq 0$) que pour $\lambda = 1$.
- En conclusion, les solutions sont donc les monômes X^d, avec $d \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2 :

1. Posons $a = \alpha + i\beta$ et cherchons z *réel* racine de P. Il vient, en considérant les parties réelle et imaginaire de l'équation $P(z) = 0$:

$$\begin{cases} z^3 + \alpha z^2 - \alpha z - 1 = 0 \\ \beta(z^2 + z) = 0 \end{cases}.$$

- Si $\beta \neq 0$, puisque $z = 0$ ne peut être solution, on a nécessairement $z = -1$, et la première relation impose $\alpha = 1$, soit $a = 1 + i\beta$. L'équation $P(z) = 0$ s'écrit alors

$$z^3 + (1+i\beta)z^2 - (1-i\beta)z - 1 = 0 \quad \text{soit} \quad (z+1)(z^2 + i\beta z - 1) = 0.$$

  L'équation $z^2 + i\beta z - 1 = 0$ ne peut avoir de solution réelle puisque $\beta \neq 0$.

  Ainsi, lorsque $a = 1 + i\beta$ avec $\beta \neq 0$, l'équation possède une et une seule racine réelle.
- Si $\beta = 0$ c'est-à-dire si $a = \alpha$ est réel, on trouve $(z-1)(z^2 + (1+a)z + 1) = 0$, soit la racine réelle $z = 1$ éventuellement accompagnée d'une ou deux racines réelles selon le signe du discriminant $(1+a)^2 - 4 = (a-1)(a+3)$. Plus précisément :

$$\begin{cases} \text{si } a \in]-3,1[\text{ alors } z = 1 \text{ est la seule racine réelle} \\ \text{si } a = -3, \text{ alors } z = 1 \text{ est racine triple} \\ \text{si } a = 1, \text{ alors } z = 1 \text{ est racine double et } z = -1 \text{ racine simple} \\ \text{si } a \notin [-3,1], \ z = 1, \ z = -\frac{a+1 \pm \sqrt{a^2+2a-3}}{2} \text{ sont les racines réelles de P} \end{cases}$$

- *Conclusion :* L'équation admet (au moins) une racine réelle si et seulement si le point A appartient à la droite d'équation $x = 1$ ou à l'axe réel. Le nombre de ces racines réelles est précisé ci-dessus.

2. *Première méthode :*

Si a est réel, on a vu que $z = 1$ est racine de P, donc P possède bien une racine de module 1. Sinon, posons $a = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$, et cherchons $z = e^{i\theta}$ racine de P. En utilisant la formule $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{\frac{i(\alpha+\beta)}{2}}.2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, la relation $P(z) = 0$ s'écrit :

$$0 = 2ie^{\frac{3i\theta}{2}}\left[\sin\frac{3\theta}{2} + \rho\sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)\right].$$

Introduisons alors la fonction $f(\theta) = \sin\frac{3\theta}{2} + \rho\sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)$. Nous avons $f(0) = \rho\sin\varphi$ et $f(2\pi) = -\rho\sin\varphi$. Puisque $\rho\sin\varphi \neq 0$, f s'annule pour $\theta \in]0, 2\pi[$ en raison du théorème des valeurs intermédiaires et P admet $e^{i\theta}$ comme racine de module 1.

Seconde méthode :

Notons que

$$P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = \frac{1}{\overline{z}^3}\left[1 + a\overline{z} - \overline{a}\,\overline{z}^2 - \overline{z}^3\right] = \frac{-1}{\overline{z}^3}\overline{P(z)}.$$

Si P n'a pas de racine de module 1, il a une racine z_1 et aussi la racine $z_2 = \dfrac{1}{\overline{z_1}} \neq z_1$, avec le même ordre de multiplicité (donc simple) ; l'une des deux (par exemple z_1) est de module strictement supérieur à 1 et l'autre de module strictement inférieur à 1. La dernière racine z_3 doit être de module 1 car sinon elle serait accompagnée d'une autre.

3. Pour $a=0$ le polynôme a pour racines $1, j, j^2$ de module 1.

Autrement, supposons que z soit racine de P de module supérieur ou égal à $1+|a|$. On a donc $z(z^2+az-\overline{a})=1$, donc $1 \geqslant (1+|a|)\left|z^2+az-\overline{a}\right|$. En utilisant l'inégalité triangulaire $|x+y| \geqslant |x|-|y|$ on obtient :

$$1 \geqslant (1+|a|)\Big(|z|(|z|-|a|)-|a|\Big) \geqslant (1+|a|)(1+|a|-|a|) = 1+|a|$$

ce qui est impossible vu que a n'est pas nul.

4. **a)** Nous calculons $a^2 = \dfrac{1-7+2i\sqrt{7}}{4} = \dfrac{-3+i\sqrt{7}}{2} = a-2$. Il vient ensuite $a^3 = a(a-2) = a-2-2a = -a-2$, puis $a^4 = (a-2)^2 = a-2-4a+4 = 2-3a$.

D'autre part, $\overline{a} = 1-a$ conduit à $\overline{a}^2 = -1-a, \overline{a}^3 = a-3, \overline{a}^4 = 3a-1$.

b) Les calculs qui précèdent permettent de poser explicitement la division euclidienne de $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)$ par P.

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
\mathrm{X}^6 & & +a\mathrm{X}^4 & & -(1-a)\mathrm{X}^2 & & -1 & \mathrm{X}^3 +a\mathrm{X}^2 -(1-a)\mathrm{X} -1 \\ \cline{8-8}
-\big(\mathrm{X}^6 & +a\mathrm{X}^5 & -(1-a)\mathrm{X}^4 & -\mathrm{X}^3\big) & & & & \mathrm{X}^3 -a\mathrm{X}^2 +(a-1)\mathrm{X} +1 \\ \cline{1-4}
& -a\mathrm{X}^5 & +\mathrm{X}^4 & +\mathrm{X}^3 & -(1-a)\mathrm{X}^2 & & -1 & \\
& -\big(-a\mathrm{X}^5 & -a^2\mathrm{X}^4 & +a(1-a)\mathrm{X}^3 & +a\mathrm{X}^2\big) & & & \\ \cline{2-5}
& & \underbrace{(1+a^2)}_{=a-1}\mathrm{X}^4 & +\underbrace{(1-a+a^2)}_{=-1}\mathrm{X}^3 & -\mathrm{X}^2 & & -1 & \\
& & -\big((a-1)\mathrm{X}^4 & +(a^2-a)\mathrm{X}^3 & +(1-a)^2\mathrm{X}^2 & +(1-a)\mathrm{X}\big) & & \\ \cline{3-6}
& & & \underbrace{(-1+a-a^2)}_{=1}\mathrm{X}^3 & +\underbrace{(-(1-a)^2-1)}_{=a}\mathrm{X}^2 & +(a-1)\mathrm{X} & -1 & \\
& & & -\big(\mathrm{X}^3 & +a\mathrm{X}^2 & -(1-a)\mathrm{X} & -1\big) & \\ \cline{4-7}
& & & & & & 0 &
\end{array}
$$

On a donc la relation :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = -\mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{P}(-\mathrm{X}).$$

c) En conséquence, si λ est racine de P, λ^2 puis λ^4 le sont aussi.

On ne peut pas avoir $\lambda = \lambda^2$, car cela donnerait $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, qui ne sont pas racines de P. On n'aura pas davantage $\lambda^2 = \lambda^4$, pour la même raison. Enfin, $\lambda = \lambda^4$ amènerait $\lambda = 0$ (exclu) ou $\lambda^3 = 1$ qui obligerait à avoir $a\lambda^2 - \overline{a}\lambda = a\overline{\lambda} - \overline{a}\lambda = 0$, soit $\overline{a}\lambda \in \mathbb{R}$. Mais alors $\overline{a}^3 = (\overline{a}\lambda)^3 = a-3$ serait réel, ce qui n'est pas.

Ainsi, les trois racines <u>distinctes</u> de P sont bien λ, $\mu = \lambda^2$ et $\nu = \lambda^4$. Leur produit est l'opposé du coefficient constant de P, soit $\lambda^7 = 1$.

Posons alors $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}}$. Nous avons essentiellement deux choix possibles pour les racines de P : $\omega, \omega^2, \omega^4$ et $\omega^3, \omega^5, \omega^6$.

Or, la somme des racines de P vaut $-a = -\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$, de partie imaginaire négative, et :

$$\mathcal{Im}(\omega+\omega^2+\omega^4) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0 \quad \text{car} \quad \sin\frac{2\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7},$$

ce qui ne nous convient pas. Donc, λ vaut $\omega^3 = \mathrm{e}^{\frac{6i\pi}{7}}$, et les racines de P sont $\omega^3, \omega^5, \omega^6$.

5. Soit un polynôme Q du troisième degré à coefficients complexes, unitaire, tel que $Q(X^2)$ soit divisible par $Q(X)$.

Si λ est racine de Q, il en est donc de λ^2, puis de λ^4 etc... Puisqu'il n'y a que trois racines, on doit alors avoir soit $\lambda = \lambda^2$ soit $\lambda = \lambda^4$ soit $\lambda = \lambda^8$, ce qui donne comme possibilités $\lambda \in \{0, 1, j, j^2, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6\}$.

Avec les racines septièmes on obtient les polynômes P et $\overline{P}$ (les racines de P étant ω^3, ω^5 et ω^6 et celles de $\overline{P}$ en étant les conjuguées, c'est-à-dire ω, ω^2 et ω^4).

Autrement, avec la racine j vient toujours j^2 et vice-versa. On a alors les polynômes $(X-1)(X^2+X+1) = X^3-1$ (convient car $X^6-1 = (X^3-1)(X^3+1)$) et $X(X^2+X+1)$ (convient : $P(X^2) = X^2(X^4+2X^2+1-X^2) = X^2(X^2-X+1)(X^2+$ ainsi que les polynômes comme $(X-j)^2(X-j^2)$: il ne convient pas car $(X^2-j)^2(X^2-j^2) = (X^2-j^4)^2(X^2-j^2) = (X-$ n'a pas de racine double.

Il reste ensuite les polynômes n'ayant que 0 ou/et 1 comme racines : $X(X-1)^2$, $X^2(X-1)$, X^3 et $(X-1)^3$, qui conviennent bien comme on le vérifie facilement.

En conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les polynômes } Q \text{ de degré 3, unitaires, tels que } Q \text{ divise } Q(X^2) \text{ sont :}\\[1ex] X^3,\ (X-1)^3,\ X^3-1,\ X^3+X^2+X,\ X(X-1)^2,\ X^2(X-1),\ P \ \text{ et } \ \overline{P}.\end{array}}$$