Prof. MAMOUNI
myismail.net

Prépas MP

Devoir Maison : algèbre linéaire

E3A 2007

Questions de cours.

1. Donner la définition du rang d'une matrice.

2. Citer sans démonstration le théorème du rang.

3. Quand dit-on que deux matrices sont semblables ? Ont-elles alors même rang ? (On ne demande pas de justifier votre réponse)

4. Qu'appelle-t-on polynôme annulateur d'un endomorphisme, d'une matrice ?

Problème.

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel normé des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
$GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$.
La matrice unité de cet espace sera notée I_n et la matrice nulle O_n.
L'espace $E = \mathbb{C}^n$ est rapporté à une base $B = \left(e_j\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et on rappelle que toute matrice carrée d'ordre n représente dans cette base un endomorphisme de E appelé endomorphisme associé.
Si v est un endomorphisme de E, on rappelle que :

v^0 est l'endomorphisme identité,

et $\forall\ m \in \mathbb{N},\ v^{m+1} = v o v^m$.

L'endomorphisme v sera dit **nilpotent** s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = \theta$ (endomorphisme nul de E).

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $J(\lambda)$ la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$J(\lambda) = \left(u_{ij}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \forall\ i \in \{1,\dots,n-1\},\ u_{i+1,i} = 1 \\ \forall\ i \in \{1,\dots,n\},\ u_{ii} = \lambda \\ u_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on rappelle que :

$$e^{z} = e^{x} e^{iy} = e^{x} \left(\cos y + i \sin y\right)$$

Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, soit $\alpha(M)$ la matrice : $\alpha(M) = \lim\limits_{m \to +\infty} S_m$ avec $S_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{M^k}{k!}$

On rappelle que pour calculer cette limite, il suffit de calculer la limite de chacun des termes de la matrice S_m.

On admettra et on utilisera sans le démontrer que cette matrice existe toujours et que si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors $\alpha(A+B) = \alpha(A)\ \alpha(B)$.

Partie 1 : Quelques calculs préliminaires.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

Déterminer les éléments propres de la matrice A.

2. Vérifier que : $\ker (A + I_3)^2 \oplus \ker (A - 2I_3) = \mathbb{C}^3$.

3. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie 2 : Quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Déterminer le rang de $J(0)$.

2.1. Déterminer $J(0)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n-1$, puis pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n$.

2.2. Vérifier que toutes les puissances de $J(0)$ sont des matrices nilpotentes.

3. Déterminer $\alpha(J(0))$ puis $U = \alpha(J(0)) - I_n$.

4. Montrer que toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.

5. Montrer que U est une matrice nilpotente de rang $n-1$.

Partie 3 : Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

Soit u un endomorphisme de E.

1. Prouver que $\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\ker\left(u^i\right) \subset \ker\left(u^{i+j}\right)$.

2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim\left(\ker u^m\right)$.

Prouver que : $r = \inf\left\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\right\}$ existe.

3. Montrer que :

(i) $\quad \forall\ m < r,\ \ker\left(u^{m}\right)$ est strictement inclus dans $\ker\left(u^{m+1}\right)$,

(ii) $\quad \ker\left(u^{r}\right) = \ker\left(u^{r+1}\right)$,

(iii) $\quad \forall\ m \geqslant r,\ \ker\left(u^{m}\right) = \ker\left(u^{m+1}\right)$.

Partie 4 : **Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.**

Soit V une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, **de rang** $n-1$ et vérifiant : $V^{n} = O_n$.

On note v l'endomorphisme de E associé à V.

1. Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^{q} à $\mathrm{Im}\left(v^{p}\right)$.

1.1. Déterminer $\mathrm{Im}\,(w)$.

1.2. Prouver que : $\ker(w) \subset \ker\left(v^{q}\right)$.

1.3. Vérifier alors que l'on a :

$$\dim\left(\ker\left(v^{p+q}\right)\right) \leqslant \dim\left(\ker\left(v^{p}\right)\right) + \dim\left(\ker\left(v^{q}\right)\right).$$

1.4. En déduire :

$$\forall\ i \in \{1,\dots,n\},\quad \dim\left(\ker\left(v^{i}\right)\right) \leqslant i.$$

1.5. Démontrer qu'en fait : $\forall\ i \in \{1,\dots,n\},\quad \dim\left(\ker\left(v^{i}\right)\right) = i.$

2. Prouver alors que $v^{n-1} \neq \theta$.

3. En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que :

$$B_1 = \left(e,\ v(e),\ v^{2}(e),\ \dots,\ v^{n-1}(e)\right)$$

soit une base de E.

4. Ecrire la matrice de v dans cette base.

Interpréter le résultat obtenu à l'aide des matrices $J(\lambda)$.

5. Déterminer alors tous les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ et montrer que les matrices de deux tels endomorphismes sont semblables.

Partie 5 : **Résolution de l'équation $J(\mu) = \alpha(X)$ d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{C})$.**

1. Montrer que : $\forall\ M \in M_n(\mathbb{C}),\ \forall\ P \in GL_n(\mathbb{C})$,

$$P^{-1}\,\alpha(M)\,P = \alpha\left(P^{-1}MP\right).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$e^{z} = i,\quad e^{z} = -1,\quad e^{z} = -3-4i.$$

3. Plus généralement, soit $\mu \in \mathbb{C}$.

Déterminer, lorsque cela est possible, tous les nombres complexes $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels que : $e^{z} = \mu$.

4. On prend alors $\mu \neq 0$ et on note s un des nombres complexes tel que : $e^{s} = \mu$.

4.1. Déterminer : $\alpha(sI_n)$.

4.2. On écrit alors $J(s)$ sous la forme : $J(s) = sI_n + J(0)$.

Exprimer $\alpha(J(s))$ à l'aide de $\alpha(J(0))$ et de μ.

4.3. Vérifier que la matrice : $\mu\left[\ \alpha(J(0)) - I_n\ \right]$ est nilpotente de rang $n-1$.

4.4. En déduire qu'il existe une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$Q^{-1}\ \alpha(J(s))\ Q = J(\mu).$$

5. Donner alors dans $M_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation proposée : $\alpha(X) = J(\mu)$.

6. En déduire dans $M_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation : $\alpha(X) = {}^{t}J(\mu)$.

7. *Applications*

7.1. On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}),\ i^2 = -1.$

Déterminer une matrice X_1 telle que : $\alpha(X_1) = T$.

7.2. On va chercher une matrice $X_2 \in M_3(\mathbb{C})$ telle que : $\alpha(X_2) = A$ où A désigne la matrice de $M_3(\mathbb{C})$ définie à la partie 1.

7.2.1. Déterminer une matrice $B_1 \in M_2(\mathbb{C})$ telle que : $\alpha(B_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.2.2. Soit $H = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{B_1} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \ln 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Calculer $\alpha(H)$.

7.2.3. Déterminer alors une matrice $X_2 \in M_3(\mathbb{C})$ telle que : $\alpha(X_2) = A$.

Fin de l'épreuve.