My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مُولَايِ اسْمَاعِيل تمُوني

Devoir Maison

Calcul Différentiel

CNC 2010

Étude de l'équation de la chaleur

Notations et objet du problème

Dans ce problème, $\mathbb{R}^n$ sera muni de sa norme euclidienne canonique notée $\|.\|$, n étant un entier $\geqslant 1$. L'adhérence d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ se notera $\overline{A}$.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}^1(I)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$; de même si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^2(\mathcal{U})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$; enfin, si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $R > 0$, on considère les parties Λ_R, Ω_R et Γ_R de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\Lambda_R := \{(x, R)\ ;\ 0 < x < \pi\}, \quad \Omega_R :=]0, \pi[\times]0, R[\quad \text{et}$$

$$\Gamma_R := \{(0, t)\ ;\ 0 \leqslant t \leqslant R\} \cup \{(x, 0)\ ;\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\} \cup \{(\pi, t)\ ;\ 0 \leqslant t \leqslant R\}.$$

On se propose de résoudre le problème suivant :

Étant donnée un réel $R > 0$ et une fonction $\psi \in \mathcal{C}^1([0, \pi])$ telle que $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$, il existe une unique fonction $F : \overline{\Omega}_R \longrightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$(1) \quad \begin{cases} \text{(i)} \quad F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \Omega_R \text{ et } \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \text{sur } \Omega_R\ ; \\ \text{(ii)} \quad \forall\, t \in [0, R], \quad F(0, t) = F(\pi, t) = 0\ ; \\ \text{(iii)} \quad \forall\, x \in [0, \pi], \quad F(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Les trois parties du problèmes sont largement indépendantes ; seul le résultat de la question **1.2.** *est utile dans la troisième partie.*

1ère partie
Résultats préliminaires

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$. Pour tout $x \in \mathcal{U}$, on note H_x la matrice *hessienne* de f au point x, c'est l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $H_x = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et on pose $\Delta f(x) = \mathrm{Tr}\,(H_x),\ x \in \mathcal{U}$; Δf est le *laplacien* de f.

1.1. Soit $x \in \mathcal{U}$; montrer que la matrice H_x est orthogonalement diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1.2. On suppose que f présente un maximum local en un point $a \in \mathcal{U}$ et on note Q_a la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à la matrice H_a.

1.2.1. Montrer que lorsque h tend vers 0 dans $\mathbb{R}^n$, $\quad f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\, Q_a(h) + \circ(\|h\|^2)$.

1.2.2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ avec $u \neq 0$.

1.2.2.1. Montrer que pour t voisin de 0 dans $\mathbb{R}$, $t^2 Q_a(u) + \circ(t^2) \leqslant 0$.

1.2.2.2. En déduire que la forme quadratique Q_a est négative.

1.2.3. Montrer que les termes diagonaux de H_a sont négatifs. Préciser le signe de $\Delta f(a)$.

1.3. Application aux fonctions harmoniques

On pose $K := \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\| \leqslant 1\}$ et on suppose dans cette question que $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}) \cap \mathcal{C}(K)$ où $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\| < 1\}$.

Définition : f est dite *harmonique* sur $\mathcal{U}$ si son laplacien Δf est nul sur $\mathcal{U}$.

1.3.1. Justifier que f est bornée sur K et qu'elle atteint ses bornes.

1.3.2. Si $\Delta f > 0$ sur $\mathcal{U}$, montrer que f ne peut pas atteindre son maximum sur K en un point de l'intérieur de K ; en déduire que

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} f(x) = \sup_{\|y\| = 1} f(y).$$

1.3.3. Si f est harmonique sur $\mathcal{U}$.

1.3.3.1. À tout $\varepsilon > 0$, on associe la fonction $f_\varepsilon : \ x \longmapsto f(x) + \varepsilon\|x\|^2$, définie sur K. Justifier que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}) \cap \mathcal{C}(K)$ et calculer le laplacien de f_ε en fonction de celui de f.

1.3.3.2. En déduire que pour tout $x \in K$, $\quad f(x) \leqslant \sup\limits_{\|y\|=1} f(y)$.

1.3.3.3. Vérifier que $-f$ est aussi harmonique sur $\mathcal{U}$ et déduire de ce qui précède que pour tout $x \in K$,

$$\inf_{\|z\|=1} f(z) \leqslant f(x).$$

2ème partie

Construction d'une solution du problème

Dans la suite du problème, on considère une fonction $\psi \in \mathcal{C}^1([0, \pi])$ telle que $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$. On prolonge ψ en une application notée $\widetilde{\psi} : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, impaire et $2\pi-$périodique, et on lui associe la suite réelle $(b_p)_{p \geqslant 1}$ ainsi que la suite de fonctions $(v_p)_{p \geqslant 1}$, définies par

$$b_p := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(t) \sin(pt)\, dt \quad \text{et} \quad v_p(x,t) = b_p \sin(px)\, e^{-p^2 t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } p \in \mathbb{N}^*.$$

2.1. Préciser l'expression de $\widetilde{\psi}(x)$ pour $x \in [-\pi, 0]$ puis pour $x \in [\pi, 3\pi]$, et montrer que $\widetilde{\psi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

2.2. Exprimer, pour tout entier $p \geqslant 1$, le coefficient de Fourier trigonométrique $b_p(\widetilde{\psi})$ en fonction de b_p. Que vaut le coefficient de Fourier $a_p(\widetilde{\psi})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$?

2.3. Montrer que la série $\sum\limits_{p \geqslant 1} b_p$ est absolument convergente.

2.4. Montrer que la série de fonctions $\sum_{p\geqslant 1} v_p$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$ et que sa somme $f:\ (x,t)\longmapsto \sum_{p=1}^{+\infty} v_p(x,t)$ y est continue.

2.5. Justifier que pour tout entier $p\geqslant 1$, la fonction v_p est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et que $\dfrac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}-\dfrac{\partial v_p}{\partial t}=0$

2.6. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, les séries de fonctions $\sum_{p\geqslant 1} p^k v_p$ et $\sum_{p\geqslant 1} p^k \dfrac{\partial v_p}{\partial x}$ convergent normalement sur $\mathbb{R}\times[a,+\infty[$ pour tout $a>0$.

2.7. Montrer soigneusement que la fonction f, définie ci-dessus, possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x et exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, sous la forme de la somme d'une série. Justifier que cette dérivée partielle est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

2.8. Montrer de même que la fonction f possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à t et l'exprimer sous la forme de la somme d'une série. Justifier que cette dérivée partielle est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

2.9. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial t}=0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

2.10. Montrer que pour tout $R>0$, la restriction de f à $\overline{\Omega}_R$ est solution du problème posé.

3ème partie
Unicité de la solution

Pour traiter cette partie, il peut être utile d'exploiter la figure du bas de la dernière page.
On considère $R>0$ et $F:\ \overline{\Omega}_R\longrightarrow\mathbb{R}$ continue ; on suppose que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω_R.

3.1. Un résultat utile : Soit $g:\ [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$.

3.1.1. Si g est dérivable sur $]a,b]$ et est telle que $g(t)\leqslant g(b)$ pour tout $t\in]a,b]$, montrer que $g'(b)\geqslant 0$.

3.1.2. Si g est deux fois dérivable sur $]a,b[$ et présente un maximum local en $x_0\in]a,b[$, montrer que $g'(x_0)=0$ et que $g''(x_0)\leqslant 0$.

3.2. Soit $r\in]0,R[$.

3.2.1. Justifier que F est bornée sur $\overline{\Omega}_r$ et qu'il existe $(x_0,t_0)\in\overline{\Omega}_r$ tel que

$$F(x_0,t_0)=\sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_r} F(x,t).$$

3.2.2. Si $(x_0,t_0)\in\Omega_r$, justifier que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,t_0)=\dfrac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0)=0$ et que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,t_0)\leqslant 0$.

3.2.3. Si $(x_0, t_0) \in \Lambda_r$, justifier que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leqslant 0$ et que $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x_0, t_0) \geqslant 0$. (On pourra considérer les fonctions $x \longmapsto F(x, r)$ définie sur $]0, \pi[$ et $t \longmapsto F(x_0, t)$ définie sur $]0, r]$.)

3.2.4. En déduire que si $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial F}{\partial t} > 0$ sur Ω_R alors $(x_0, t_0) \in \Gamma_r$.

3.3. On suppose dans cette question que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial F}{\partial t} > 0$ sur Ω_R et on considère une suite $(r_p)_{p \geqslant 1}$ d'éléments de l'intervalle $]0, R[$ qui **croit** vers R ; d'après ce qui précède, il existe, pour chaque entier $p \geqslant 1$, un point $z_p = (x_p, t_p)$ de Γ_{r_p} tel que $F(x_p, t_p) = \sup\limits_{(x,t) \in \overline{\Omega}_{r_p}} F(x, t)$.

3.3.1. Justifier qu'on peut extraire de la suite $(z_p)_{p \geqslant 1}$ une sous-suite $(z_{\sigma(p)})_{p \geqslant 1}$ qui converge vers un point $z = (x^*, t^*)$ de Γ_R, puis montrer que la suite image $\big(F(z_{\sigma(p)})\big)_{p \geqslant 1}$ croit vers $F(z)$.

3.3.2. En déduire que pour tout $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, R[$, $F(x^*, t^*) \geqslant F(x, t)$ puis étendre cette inégalité à tout $(x, t) \in \overline{\Omega}_R$.

3.4. On suppose dans cette question que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial F}{\partial t} \geqslant 0$ sur Ω_R. Pour tout entier $p \geqslant 1$, posons

$$F_p(x, t) := F(x, t) + \frac{x^2}{p}, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_R.$$

3.4.1. Vérifier que pour tout entier $p \geqslant 1$, $F_p \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_R) \cap \mathcal{C}^2(\Omega_R)$ et que $\dfrac{\partial^2 F_p}{\partial x^2} - \dfrac{\partial F_p}{\partial t} > 0$ sur Ω_R.

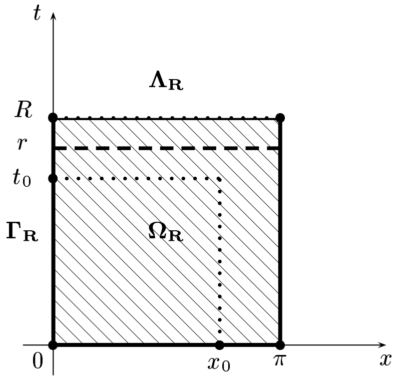
3.4.2. En déduire que pour tout entier $p \geqslant 1$, il existe $(x_p, t_p) \in \Gamma_R$ tel que

$$F_p(x_p, t_p) = \sup_{(x,t) \in \overline{\Omega}_R} F_p(x, t).$$

3.4.3. Déduire de ce qui précède qu'il existe $(x^*, t^*) \in \Gamma_R$ tel que $\quad F(x^*, t^*) = \sup\limits_{(x,t) \in \overline{\Omega}_R} F(x, t)$. (Considérer, après en avoir justifié l'existence, une sous-suite convergente de la suite $\Big((x_p, t_p)\Big)_{p \geqslant 1}$.)

3.5. On suppose que F est nulle sur Γ_R et que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$ sur Ω_R. Montrer que F est nulle sur $\overline{\Omega}_R$. (On pourra appliquer le résultat qui précède à F et à $-F$.)

3.6. Soit $f_1 : \overline{\Omega}_R \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) de (1). La fonction f étant celle définie dans la deuxième partie, vérifier que la fonction $G := f_1 - f$ satisfait les hypothèses de la question ci-dessus et conclure que $f_1 = f$.



FIN DE L'ÉPREUVE

Un corrigé du CNC 2010 MP Maths1

1.1) On a f est de classe C^2 donc par théorème de Schwarz $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$.

H_x est alors une matrice symétrique réelle donc elle est orthogonalement diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

1.2.1) $f \in C^2(U)$ donc Taylor-Young donne $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + (\mathrm{grad} f(a)|h) + \frac{1}{2}Q_a(h) + o(\|h\|^2)$

or f présente un maximum local en a donc $\mathrm{grad} f(a) = 0$ d'où $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \frac{1}{2}Q_a(h) + o(\|h\|^2)$.

1.2.2.1) f présente un maximum local en a donc $\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall h \in B(0,\varepsilon),\ f(a+h) - f(a) \leq 0,$ donc

pour $|t| < \frac{\varepsilon}{\|u\|}$, $f(a+tu) - f(a) \leq 0$ càd d'aprés 1.2.1), $\frac{1}{2}t^2 Q_a(u) + o(t^2) \leq 0$ pour t voisin de zéro.

1.2.2.2) D'aprés 1.2.2.1) on a pour $t \in]-\frac{\varepsilon}{\|u\|}, \frac{\varepsilon}{\|u\|}[\setminus\{0\},\ \frac{1}{2}Q_a(u) + o(1) \leq 0$ et en faisant tendre t vers 0 on a $Q_a(u) \leq 0$ ceci pour tout u non nul de plus $Q_a(0) = 0$ donc Q_a est négative.

1.2.3) Soit e la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $(H_a)_{i,i} = Q_a(e_i) \leq 0$ et $\Delta f(a) = \sum_{i=1}^{n} (H_a)_{i,i} \leq 0$.

1.3.1) On a K est fermé borné en dimension finie donc compact et comme $f \in C(K)$ alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.

1.3.2) Si f atteint son maximum sur K en un point $a \in \overset{\circ}{K} = U$ alors f présente un maximum local en a donc d'aprés 1.2.3), $\Delta f(a) \leq 0$ ce qui contredit $\Delta f > 0$ sur U d'où $\sup_{\|x\|\leq 1} f(x) = \sup_{\|y\|=1} f(y)$.

1.3.3.1) Les applications $e_i^* : x \to x_i$ ont des dérivées partielles secondes nulles donc continues, donc les e_i^* sont dans $C^2(\mathbb{R}^n)$ qui est une algèbre donc l'application $q : x \to \|x\|^2$ est dans $C^2(\mathbb{R}^n)$ en particulier elle est C^2 sur U et continue sur K par suite $f_\varepsilon = f + \varepsilon q \in C^2(U) \cap C(K)$.

On a $\Delta f_\varepsilon = \Delta f + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon$.

1.3.3.2) On a $\Delta f_\varepsilon = 2n\varepsilon > 0$ donc d'aprés 1.3.2) on a $\forall x \in K,\ f(x) + \varepsilon\|x\|^2 \leq \sup_{\|y\|=1} f_\varepsilon(y)$ par suite

$\forall x \in K,\ f(x) \leq \sup_{\|y\|=1} f(y) + \varepsilon$ et en faisant tendre ε vers 0 on obtient $\forall x \in K,\ f(x) \leq \sup_{\|y\|=1} f(y)$.

1.3.3.3) On a $\Delta(-f) = -\Delta f = 0$ donc $-f$ est harmonique d'où d'aprés 1.3.3.2) on a $\forall x \in K$,

$-f(x) \leq \sup\limits_{\|y\|=1} -f(y)$ càd $f(x) \geq \inf\limits_{\|y\|=1} f(y)$.

2.1) Pour $x \in [-\pi, 0]$, $\tilde{\psi}(x) = -\tilde{\psi}(-x) = -\psi(-x)$. Pour $x \in [\pi, 2\pi]$ on a $\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(x-2\pi)$

et comme $x - 2\pi \in [-\pi, 0]$ alors $\tilde{\psi}(x) = -\psi(2\pi - x)$. Pour. $x \in [2\pi, 3\pi]$ on a $\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(x-2\pi)$

et comme $x - 2\pi \in [0, \pi]$ alors $\tilde{\psi}(x) = \psi(x - 2\pi)$. Ainsi $\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} -\psi(-x) \text{ si } x \in [-\pi, 0] \\ \psi(x) \text{ si } x \in [0, \pi] \\ -\psi(2\pi - x) \text{ si } x \in [\pi, 2\pi] \\ \psi(x - 2\pi) \text{ si } x \in [2\pi, 3\pi] \end{cases}$

avec $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$, donc $\lim\limits_{0^-}\tilde{\psi} = \lim\limits_{0^+}\tilde{\psi} = 0$ et $\lim\limits_{\pi^-}\tilde{\psi} = \lim\limits_{\pi^+}\tilde{\psi} = 0$, donc $\tilde{\psi}$ est continue en 0 et π de plus $\tilde{\psi}$ est continue sur $]0, \pi[$ car ψ l'est, donc par parité et périodicité $\tilde{\psi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité: On a ψ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$ donc :

$\tilde{\psi}'(x) = \begin{cases} \psi'(-x) \text{ si } x \in]-\pi, 0[\\ \psi'(x) \text{ si } x \in]0, \pi[\end{cases}$, par suite $\lim\limits_{0^-}\tilde{\psi}' = \psi'(0) = \lim\limits_{0^+}\tilde{\psi}'$ (0) d'où par théorème du prolongement de la dérivée on déduit que $\tilde{\psi}$ est dérivable en 0 et que sa dérivée est continue en 0.

$\tilde{\psi}'(x) = \begin{cases} \psi'(x) \text{ si } x \in]0, \pi[\\ \psi'(2\pi - x) \text{ si } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$ donc $\lim\limits_{\pi^-}\tilde{\psi}' = \psi'(\pi) = \lim\limits_{\pi^+}\tilde{\psi}'$ donc par théorème du prolongement de la dérivée on déduit que $\tilde{\psi}$ est dérivable en π et que sa dérivée est continue en π.

Par parité et périodicité on déduit que $\tilde{\psi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2.2) Dans la suite b_p désigne : $\boxed{b_p = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\sin(pt)dt.}$

$\tilde{\psi}$ est impair donc pour $p \geq 0$, $a_p(\tilde{\psi}) = 0$ et pour $p \geq 1$, $b_p(\tilde{\psi}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \tilde{\psi}(t)\sin(pt)dt = b_p$.

2.3) On a $\tilde{\psi}$ est 2π périodique de classe C^1 donc la famille $(c_k(\tilde{\psi}))_{k\in\mathbb{Z}}$ est absolument sommable or pour $p \geq 1$, $c_p(\tilde{\psi}) = \frac{1}{2}(a_p(\tilde{\psi}) - ib_p(\tilde{\psi})) = -\frac{i}{2}b_p$ donc la série $\sum\limits_{p\geq 1} b_p$ converge absolument.

2.4) On fera les abréviations : cvn (resp cvu) désigne converge normalement (resp uniformément).

On a v_p est continue sur $D := \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et pour $(x,t) \in D$, $|v_p(x,t)| \leq |b_p|$ avec $\sum\limits_{p\geq 1} |b_p|$

converge donc la série $\sum\limits_{p\geq 1} v_p$ cvn donc cvu sur D et par théorème de continuité on déduit que sa somme f est continue sur D.

2.5) On a $(x,t) \to x$ et $(x,t) \to t$ sont linéaire donc C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, $u \to \sin(pu)$ et $u \to e^{-pu^2}$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et comme la composé et le produit d'applications C^∞ l'est alors $v_p \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

On a $\frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}(x,t) = -p^2 b_p \sin(px) e^{-p^2 t} = \frac{\partial v_p}{\partial t}(x,t)$.

2.6) Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times [a,+\infty[$, on a $|p^k v_p(x,t)| \leq p^k e^{-p^2 a}|b_p| = o(|b_p|)$, $|p^k \frac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)| = p^{k+1}|\cos(pt)|e^{-pt^2}$ $\leq p^{k+1} e^{-p^2 a}|b_p| = o(|b_p|)$ et $\sum |b_p|$ converge donc les séries $\sum p^k v_p$ et $\sum p^k \frac{\partial v_p}{\partial x}$ cvn sur $\mathbb{R} \times [a,+\infty[$.

2.7) •Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$. On fixe $t > 0$. On a $\forall p \geq 1$, l'application $f_p : x \to v_p(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. D'aprés 2.4) la série $\sum\limits_{p\geq 1} f_p$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. D'aprés 2.6) on a la série $\sum\limits_{p\geq 1} \frac{\partial v_p}{\partial x}$ cvn sur $\mathbb{R} \times [t,+\infty[$ et comme $f_p'(x) = \frac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)$ alors la série $\sum\limits_{p\geq 1} f_p'$ cvn donc cvu sur $\mathbb{R}$ et par théorème de dérivation on déduit que $x \to f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)$.

•Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$: On a $v_p \in C^1(\mathbb{R}^2)$ donc $\frac{\partial v_p}{\partial x} \in C(\mathbb{R} \times]0,+\infty[)$. Soit K un compact inclus dans $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$, l'application $(x,t) \to t$ est continue sur K compact donc elle est bornée et atteint sa borne inférieure donc il existe $a \in]0,+\infty[$ tel que $\forall (x,t) \in K$, $t \geq a$ alors $K \subset \mathbb{R} \times [a,+\infty[$ donc par 2.6) la série $\sum\limits_{p\geq 1} \frac{\partial v_p}{\partial x}$ cvn donc cvu sur K donc par théorème de continuité $\frac{\partial f}{\partial x} \in C(\mathbb{R} \times]0,+\infty[)$.

2.8) •Existence de $\frac{\partial f}{\partial t}$. On fixe $x \in \mathbb{R}$. On a $\forall p \geq 1$, l'application $f_p : t \to v_p(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. D'aprés 2.4) la série $\sum\limits_{p\geq 1} f_p$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. Soit $a > 0$. D'aprés 2.6) on a la série $\sum\limits_{p\geq 1} p^2 v_p$ cvn sur $\mathbb{R} \times [a,+\infty[$ et comme $f_p'(t) = -p^2 v_p(x,t)$ alors la série $\sum\limits_{p\geq 1} f_p'$ cvn donc cvu sur $[a,+\infty[$ en particulier $\sum\limits_{p\geq 1} f_p'$ cvu sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$ donc par théorème de dérivation on déduit que $t \to f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\partial v_p}{\partial t}(x,t)$.

•Continuité de $\frac{\partial f}{\partial t}$: On a $v_p \in C^1(\mathbb{R}^2)$ donc $\frac{\partial v_p}{\partial t} \in C(\mathbb{R} \times]0,+\infty[)$. Soit K un compact inclus dans $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$, comme dans 2.7) il existe $a \in]0,+\infty[$ tel que $K \subset \mathbb{R} \times [a,+\infty[$ donc par 2.6) la série $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial v_p}{\partial t} = \sum_{p\geq 1} -p^2 v_p$ cvn donc cvu sur K donc par théorème de continuité on a $\frac{\partial f}{\partial t} \in C(\mathbb{R} \times]0,+\infty[)$.

2.9) Posons $D = \mathbb{R} \times]0,+\infty[$. On a $v_p \in C^2(D)$, $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial v_p}{\partial x}$ et $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial v_p}{\partial t}$ convergent simplement sur D.

Soit K un compact inclus dans D, alors il existe $a \in]0,+\infty[$ tel que $K \subset \mathbb{R} \times [a,+\infty[$. On a $\frac{\partial^2 v_p}{\partial t^2} = p^4 v_p$, $\frac{\partial^2 v_p}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 v_p}{\partial x \partial t} = -p^2 \frac{\partial v_p}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2} = -p^2 v_p$, donc par 2.6) les séries $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial t^2}$, $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial t \partial x}$, $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}$, $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial x \partial t}$ cvn donc cvu sur K, en particulier pour x fixé (resp t fixé) les séries $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial t^2}$, $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial t \partial x}$, (resp $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}$, $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial x \partial t}$) cvu sur tout segment $\subset]0,+\infty[$ (resp tout segment $\subset \mathbb{R}$) donc par théorème de dérivabilité $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$ (resp $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$) existent. Par théorème de continuité on a $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$ sont dans $C(D)$ donc $f \in C^2(D)$. D'aprés 2.5) on a $\frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2} = \frac{\partial v_p}{\partial t}$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$ sur D.

2.10) On a $\Omega_R \subset \mathbb{R} \times]0,+\infty[$ donc d'aprés 2.9), $f \in C^2(\Omega_R)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ sur Ω_R. On a pour $t \in [0,R]$, $\forall p \geq 1$, $v_p(0,t) = v(\pi,t) = 0$ donc $f(0,t) = f(\pi,t) = 0$. On a pour x dans $[0,\pi]$

$f(x,0) = \sum_{p=1}^{+\infty} v_p(x,0) = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p \sin(px) = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p(\tilde{\psi}) \sin(px)$ et comme $\tilde{\psi}$ est 2π périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ alors par théorème de convergence normale la série de Fourier de $\tilde{\psi}$ cvn vers $\tilde{\psi}$ par suite $\forall x \in [0,\pi]$, $f(x,0) = \tilde{\psi}(x) = \psi(x)$, finalement la restriction de f à $\overline{\Omega}_R$ est solution problème posé.

3.1.1) On a pour $t \in]a,b[$, $\frac{g(t)-g(b)}{t-b} \geq 0$ en faisant tendre t vers b on a $g'(b) \geq 0$.

3.1.2) g présente un maximum local en x_0 donc il existe $\alpha, \beta \in]a,b[$ tels que $\alpha < x_0 < \beta$ et $\forall t \in [\alpha,\beta]$, $g(t) \leq g(x_0)$ donc d'aprés 3.1.1) on a $g'(x_0) \geq 0$, d'autre part on a $\forall t \in]x_0,\beta]$,

$\frac{g(t)-g(x_0)}{t-x_0} \leq 0$ en faisant tendre t vers x_0 on a $g'(x_0) \leq 0$ d'où $g'(x_0) = 0$ donc par la formule de taylor on a $g(t) - g(x_0) \underset{t\to x_0}{=} \frac{1}{2}(t-x_0)^2[g''(x_0) + o(1)]$ donc $\lim\limits_{t\to x_0} \frac{g(t)-g(x_0)}{(t-x_0)^2} = \frac{1}{2}g''(x_0)$ et comme $\forall t \in]x_0, \beta]$, $\frac{g(t)-g(x_0)}{(t-x_0)^2} \leq 0$ alors $g''(x_0) \leq 0$.

3.2) On a $\overline{\Omega}_r \subset \overline{\Omega}_R$ donc F est continue sur $\overline{\Omega}_r$ qui est compact(fermé borné en dimension finie) donc F est bornée sur $\overline{\Omega}_r$ et atteint ses bornes, d'où $\exists(x_0,t_0) \in \overline{\Omega}_r$ tel que $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_r} F(x,t) = F(x_0,t_0)$.

3.2.1) Si $(x_0,t_0) \in \Omega_r$ alors F présente un maximum local en (x_0,t_0) donc $\text{grad}F(x_0,t_0) = 0$ càd $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,t_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0)$ de plus $F \in C^2(\Omega_r)$ donc d'aprés 1.2.3) on a $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0$.

3.2.2) Si $(x_0,t_0) \in \wedge_r$ càd $x_0 \in]0,\pi[$ et $t_0 = r$, alors la fonction $g_1 : x \to F(x,r),\ x \in]0,\pi[$, présente un maximum local en x_0 donc d'aprés 3.1.2) on a $g_1''(x_0) \leq 0$ càd $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0.$ On a aussi l'application $g_2 : t \to F(x_0,t),\ t \in [0,r]$, est dérivable sur $]0,r]$ et vérifie $\forall t \in]0,r],\ g_2(t) \leq g_2(r)$ donc d'aprés 3.1.1) on a $g_2'(r) \geq 0$ càd $\frac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0) \geq 0.$

3.2.3) De 3.2.1) et 3.2.2) résulte que si $(x_0,t_0) \in \Omega_r \cup \wedge_r \subset \Omega_R$ alors $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,t_0) - \frac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0) \leq 0$ ce qui contredit $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} > 0$ sur Ω_R donc $(x_0,t_0) \in \Gamma_r$.

3.3.1) Soit $R > 0$, $\Gamma_R \subset [0,\pi] \times [0,R]$ donc Γ_R est borné, $\Gamma_R = f^{-1}(\{0\})$ où $f : [0,\pi] \times [0,R] \to \mathbb{R}$, $(x,t) \to tx(x-\pi)$ est continue donc Γ_R est fermé borné en dimension finie donc compact et comme $z_p \in \Gamma_{r_p} \subset \Gamma_R$ alors on peut extraire de $(z_p)_{p\geq1}$ une sous-suite $(z_{\sigma(p)})_{p\geq1}$ qui converge vers un point $z = (x^*,t^*) \in \Gamma_R$, or $F \in C(\overline{\Omega}_R)$ et $(z_{\sigma(p)})_{p\geq1}$ converge vers z alors $(F(z_{\sigma(p)}))_{p\geq1}$ tend vers $F(z)$. D'autre part si $r \leq s$ alors $\overline{\Omega}_r \subset \overline{\Omega}_s$ donc $\sup\limits_{\overline{\Omega}_r} F \leq \sup\limits_{\overline{\Omega}_s} F$, il en résulte que $\sup\limits_{\overline{\Omega}_{\sigma(p)}} F \leq \sup\limits_{\overline{\Omega}_{\sigma(p+1)}} F$, d'où la croissance de la suite $(F(z_{\sigma(p)}))_{p\geq1}$.

3.3.2) Soit $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,R[$, comme $t < R$ et $r_{\sigma(p)}$ tend vers R alors il existe p tel que $t < r_{\sigma(p)}$, donc $(x,t) \in \overline{\Omega}_{r_{\sigma(p)}}$, d'où $F(x,t) \leq \sup\limits_{\overline{\Omega}_{r_{\sigma(p)}}} F = F(z_{\sigma(p)}) \leq F(z)$. (car $F(z_{\sigma(p)})$ croit vers $F(z)$). On a donc $\forall(x,t) \in [0,\pi] \times [0,R[,\ F(x,t) \leq F(z)$ et par continuité de F sur $\overline{\Omega}_R$ on déduit en faisant tendre t vers R que l'inégalité reste valable pour $t = R,$ ainsi $\forall(x,t) \in \overline{\Omega}_R,\ F(x,t) \leq F(x^*,t^*).$

3.4.1) Notons $D = C(\overline{\Omega}_R) \cap C^2(\Omega_R).$ L'application $g : (x,t) \to \frac{x^2}{p}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en particulier $g \in D,$ on a aussi $F \in D$ donc $F_p = F + g \in D.$ On a $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{2}{p}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} \geq 0$ sur $\Omega_R,$ donc $\frac{\partial^2 F_p}{\partial x^2} - \frac{\partial F_p}{\partial t} = \frac{2}{p} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} \geq \frac{2}{p} > 0$ sur $\Omega_R.$

3.4.2) Dans 3.3) on a vu que si $F \in C(\overline{\Omega}_R) \cap C^2(\Omega_R)$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} > 0$ sur Ω_R alors il existe $(x^*,t^*) \in \Gamma_R$ tel que $\forall(x,t) \in \overline{\Omega}_R,\ F(x^*,t^*) \geq F(x,t)$ càd $\sup\limits_{\overline{\Omega}_R} F$ est atteint en un point de $\Gamma_R.$

En appliquant ceci à $F_p \in C(\overline{\Omega}_R) \cap C^2(\Omega_R)$ avec $\frac{\partial^2 F_p}{\partial x^2} - \frac{\partial F_p}{\partial t} > 0$ sur Ω_R on obtient l'existence de $(x_p,t_p) \in \Gamma_R$ tel que $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F_p(x,t) = F_p(x_p,t_p).$

3.4.3) On a vu dans 3.3.1 que Γ_R est compact, donc de la suite $z_p = (x_p,t_p)$ on peut extraire $(z_{\sigma(p)})$ qui converge vers un certain $z = (x^*,t^*) \in \Gamma_R.$ Pour $(x,t) \in \overline{\Omega}_R,\ F(x,t) + \frac{x^2}{\sigma(p)} \leq F(z_{\sigma(p)}) + \frac{x^2_{\sigma(p)}}{\sigma(p)}$ et en faisant tendre p vers $+\infty$ on a par continuité de $F,\ F(x,t) \leq F(z)$ d'où $F(z) = \sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F(x,t).$

3.5) On a sur $\Omega_R,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \geq 0$ donc d'aprés 3.4) il existe $z \in \Gamma_R,$ tel que $F(z) = \sup\limits_{\overline{\Omega}_R} F$ et comme F est nulle sur Γ_R alors $\sup\limits_{\overline{\Omega}_R} F = 0$ donc $F \leq 0,$ d'autre part $-F$ vérifie les mêmes hypothèses que F donc $-F \leq 0$ finalement F est nulle sur $\overline{\Omega}_R.$

3.6) On a f et f_1 sont dans $C^2(\Omega_R) \cap C(\overline{\Omega}_R)$ donc $G = f_1 - f$ l'est.

Sur $\Omega_R,$ on a: $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial f_1}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0.$

$\forall t \in [0,R],\ G(0,t) = f_1(0,t) - f(0,t) = 0$ de même $G(\pi,t) = 0.$

$\forall x \in [0,\pi],\ G(x,0) = f_1(x,0) - f(x,0) = \psi(x) - \psi(x) = 0.$

Ainsi G est nulle sur Γ_R et $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial t} = 0$ sur Ω_R donc d'aprés 3.5), $G = 0$ d'où $f_1 = f.$