# Devoir Maison : Déterminants

Concours National Commun – Session 2019 – MP

**Calcul du déterminant de Cauchy**

On considère un entier $n \geqslant 2$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de réels telles que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout couple $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$. Pour tout entier $m$ tel que $0 < m \leqslant n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre $m$, associé aux familles $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, est le nombre, noté $\Delta_m$, égal au déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant m}$.

**2.1.** On suppose qu'il existe $(i_1,i_2) \in \{1,\dots,n\}^2$, avec $i_1 \neq i_2$, tel que $a_{i_1} = a_{i_2}$. Justifier que $\Delta_n = 0$.

*On suppose désormais que les réels $a_1,\dots,a_n$ sont deux à deux* **distincts** *et on considère la fraction rationnelle*

$$R = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(X-b_j)}{\prod_{k=1}^{n}(X+a_k)} .$$

**2.2.** Justifier que les polynômes $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X-b_k)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X+a_k)$ de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux.

**2.3. Décomposition en éléments simples de la fraction $R$**

**2.3.1.** Préciser les pôles de la fraction rationnelle $R$ et vérifier qu'ils sont tous simples.

**2.3.2.** En déduire que la décomposition en éléments simples, dans $\mathbb{R}(X)$, de la fraction $R$ est de la forme $R = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X+a_k}$ en précisant les expressions des réels $\alpha_k$ en fonction des $a_k$ et des $b_k$.

**2.4. Application au calcul de $\Delta_n$**

**2.4.1.** Montrer que $\alpha_n\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}$.

**2.4.2.** En déduire que $\alpha_n\Delta_n = R(b_n)\Delta_{n-1}$.

**2.4.3.** Calculer $\Delta_2$ puis montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\quad \Delta_n = \dfrac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}$.

# CNC – 2019 – MP – Math 2

## Problème

**2.1**

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ & & \ddots & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

On a $a_{i_1} = a_{i_2}$ et $i_1 \neq i_2$

Alors les deux lignes $L_{i_1}$ et $L_{i_2}$ sont égales

D'où $\boxed{\Delta_n = 0}$

**2.2** $\left(\prod_{1\leq j\leq n-1}(X-b_j)\right) \wedge \left(\prod_{1\leq k\leq n}(X+a_k)\right) = 1$ ?

$\left(\forall 1\leq j\leq n-1, \forall 1\leq k\leq n, \ b_j \neq -a_k\right)$ (car $b_j + a_k \neq 0$)

$\Rightarrow \left(\forall 1\leq j\leq n-1, \forall 1\leq k\leq n, \ (X-b_j)\wedge(X+a_k) = 1\right)$

D'où $\left(\prod_{1\leq j\leq n-1}(X-b_j)\right) \wedge \left(\prod_{1\leq k\leq n}(X+a_k)\right) = 1$

Piste 2

Les polynômes $\left(\prod_{1\leq j\leq n-1}(X-b_j)\right)$ et $\left(\prod_{1\leq k\leq n}(X+a_k)\right)$ sont scindés et n'ont aucune racine commune

Donc ils sont premiers entre eux

**2.3.1** $R(X) = \dfrac{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (X - b_j)}{\prod_{1 \leq k \leq n} (X + a_k)}$ .

Pour tout $1 \leq k \leq n$, $(-a_k)$ est une racine de $\prod_{1 \leq k \leq n} (X + a_k)$

et n'en est pas pour $\prod_{1 \leq j \leq n-1} (X - b_j)$ .

D'où les pôles de $R(X)$ sont les $(-a_k)$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

En plus, ils sont tous simples car tous racines simples de $\prod_{1 \leq k \leq n} (X + a_k)$ .

**2.3.2**

$$R(X) = \frac{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (X - b_j)}{\prod_{1 \leq j \leq n} (X + a_j)} \in \mathbb{R}(X) \text{ et } d^{\circ}(R) = -1 < 0$$

en plus tous ses pôles, $(-a_j)_{1 \leq j \leq n}$, sont simples

Alors la décomposition en éléments simples est de la forme :

$$R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X + a_k} \quad (\Omega)$$

$$R(X) = \frac{\prod_{1\leq j\leq n-1}(X-b_j)}{\prod_{1\leq j\leq n}(X+a_j)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X+a_k} \quad (\Omega)$$

Soit $1\leq k\leq n$, $\alpha_k = ?$

Multiplions dans $(\Omega)$ par $(X+a_k)$, puis faisons tendre $X$ vers $(-a_k)$, on obtient :

$$\alpha_k = \frac{\prod_{1\leq j\leq n-1}(-a_k-b_j)}{\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq k}}(-a_k+a_j)} = \frac{(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}(a_k+b_j)}{(-1)^{n-1}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq k}}(a_k-a_j)}$$

C/C :

$$\forall 1\leq k\leq n, \quad \alpha_k = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(a_k+b_j)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(a_k-a_j)}$$

2.4.1

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ & & \ddots & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

Notons $L'_1, \dots, L'_n$ ces lignes.

Notons $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ - & - & - & - \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & R(b_2) & \cdots & R(b_n) \end{vmatrix}$

La dernière ligne est :

$$\left(\left[\frac{\alpha_1}{a_1+b_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{a_n+b_1}\right] \cdots \left[\frac{\alpha_1}{a_1+b_n} + \cdots + \frac{\alpha_n}{a_n+b_n}\right]\right)$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\left(\frac{1}{a_1+b_1} \cdots \frac{1}{a_1+b_n}\right)}_{L'_1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\left(\frac{1}{a_n+b_1} \cdots \frac{1}{a_n+b_n}\right)}_{L'_n}$$

$$= \alpha_1 L'_1 + \cdots + \alpha_{n-1} L'_{n-1} + \alpha_n L'_n$$

Avec $L_n \leftarrow L_n - (\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_{n-1} L_{n-1})$ dans le déterminant $\Delta$ on obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ & & \cdots & \\ \frac{\alpha_n}{a_n+b_1} & \frac{\alpha_n}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{\alpha_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = \alpha_n \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ & & \cdots & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = \alpha_n \Delta_n}$$ CQFD

2.4.2

On a $\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ - & - & - & - \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & R(b_2) & \cdots & R(b_n) \end{vmatrix}$

Or $R(b_1) = \cdots = R(b_{n-1}) = 0$

Alors $\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ - & - & - & - \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & 0 & \cdots 0 & R(b_n) \end{vmatrix}$

En développant suivant la dernière ligne, on a :

$$\alpha_n \Delta_n = R(b_n) \Delta_{n-1}$$

2.4.3

(i) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} - \frac{1}{(a_2+b_1)(a_1+b_2)}$$

$$= \frac{(a_2+b_1)(a_1+b_2) - (a_1+b_1)(a_2+b_2)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)}$$

$$\Delta_2 = \frac{a_2 b_2 + a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)}$$

(ii) Mq que :

$$\forall n \geqslant 2, \ \Delta_n = \frac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leqslant i, j \leqslant n} (a_i + b_j)}$$

Raisonnons par récurrence sur $n \geqslant 2$.

Initialisation : Pour $n = 2$

$$\Delta_2 = \frac{(a_2 - a_1) b_2 + (a_1 - a_2) b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)}$$

$$= \frac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)}$$

$$= \frac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leqslant i, j \leqslant 2} (a_i + b_j)}$$

Hérédité :

Soit $n \geqslant 2$.

Supposons que $$\Delta_{n-1} = \frac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leqslant i, j \leqslant n-1} (a_i + b_j)}$$

Et montrons que $$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leqslant i, j \leqslant n} (a_i + b_j)}$$

On a :

$$\Delta_n = \frac{R(b_n)}{d_n}\,\Delta_{n-1}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)}{\prod_{k=1}^{n}(b_n + a_k)} \cdot \frac{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq n}}(a_n - a_j)}{\prod_{j=1}^{n-1}(a_n + b_j)} \cdot \Delta_{n-1}$$

$$\underset{\text{HR.}}{=} \frac{\left(\prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)(a_n - a_j)\right)}{\prod_{k=1}^{n}(b_n + a_k) \cdot \prod_{k=1}^{n-1}(a_n + b_k)} \cdot \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1}(a_i + b_j)}$$

Saviez-vous?

$$\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} x_{ij}\right) \cdot \boxed{?} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij}$$

Réponse

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} x_{in}\right)$$

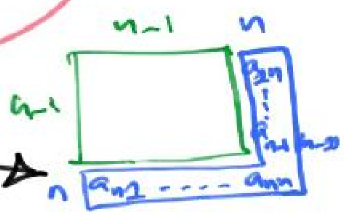
NB

$$\left(\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} x_{ij}\right) \cdot \boxed{?} = \prod_{1 \leq i, j \leq n} x_{ij}$$

Réponse

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_{in}\right) \times \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_{ni}\right)$$

NB



$$\Delta_n = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)(a_n - a_j)\right)}{\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_n) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)} \cdot \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)}$$

$$\boxed{\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}}$$

CQFD

Fin partie I