

DM Analyse (Sup MPSI)

Intégration

Thème 3: Valeur de la moyenne, CNC MP 2006

Définitions et notations

Dans ce problème, E désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications **continues** de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , et E_2 le sous ensemble de E formé des applications **de carrés intégrables sur \mathbb{R}^+** .

À toute fonction $f \in E$ on associe la fonction, notée $\psi(f)$, définie sur \mathbb{R}^+ par

$$\psi(f)(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad \psi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Si Φ est un endomorphisme de E , on dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de Φ s'il existe $f \in E$ tel que $\Phi(f) = \lambda f$ et $f \neq 0$; dans ce cas, on dit que f est un vecteur propre de Φ associé à λ et $\text{Ker}(\Phi - \lambda \text{id}_E)$ s'appelle alors le sous-espace propre de Φ associé à la valeur propre λ .

Première partie

1. Soient a et b deux réels strictement positifs.

1-1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite, on pose $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.

1-2. Montrer que $I(a, b) = -I(b, a)$ et que $I(a, b) = I(1, b/a)$.

1-3. On note φ l'application définie, pour tout $x \geq 1$, par $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$.

1-3-1. Montrer que φ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

1-3-2. Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour $x \geq 1$.

1-3-3. Que vaut alors $\varphi(x)$ pour $x \geq 1$?

1-4. En déduire soigneusement la valeur de l'intégrale $I(a, b)$ en fonction de a et b .

2. 2-1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

2-2. Préciser le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$.

2-3. Montrer que cette série entière converge uniformément sur le segment $[0, 1]$.

2-4. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; montrer alors que $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{12}$.

Deuxième partie

1. Soit f un élément de E ; on note g la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt .$$

1-1. Justifier que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ et que la fonction $\psi(f)$ est un élément de E .

1-2. On suppose que la fonction f tend vers une limite finie λ lorsque x tend vers $+\infty$; montrer qu'il en est de même de la fonction $\psi(f)$. Étudier la réciproque.

1-3. Que peut-on dire dans le cas où cette limite est égale à $+\infty$?

1-4. On pose $h(x) = xf(x)$, $x \geq 0$.

1-4-1. Montrer que $g - \psi(g) = \psi(h)$.

1-4-2. En déduire que si f est intégrable sur $[0, +\infty[$ alors $\psi(h)$ admet 0 comme limite en $+\infty$. Étudier la réciproque.

1-5. Montrer que si f est positive alors, $0 \leq \psi(\sqrt{f}) \leq \sqrt{\psi(f)}$; dans quel cas y'a-t-il égalité ?

2. 2-1. Montrer que ψ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

2-2. Montrer que ψ est injectif.

2-3. L'endomorphisme ψ est-il surjectif ?

3. Soit λ un réel non nul.

3-1. Déterminer les applications f de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} dérivables et vérifiant

$$\forall x > 0, \quad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0.$$

3-2. Pour quelles valeurs du réel λ ces fonctions sont-elles prolongeables à droite en 0 ?

4. 4-1. Est-ce que 0 est valeur propre de ψ ?

4-2. Montrer que si $f \in E$ est un vecteur propre de ψ associé à une valeur propre μ alors f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

4-3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de ψ et préciser pour chacune d'elles le sous-espace propre associé.

Troisième partie

1. 1-1. Montrer que si f et g sont deux éléments de E_2 , leur produit fg est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^+ .

1-2. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E .

1-3. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur E_2 .

Dans la suite, ce produit scalaire se notera (\cdot, \cdot) et $\|\cdot\|$ désignera la norme associée.

2. Soit f un élément de E_2 ; on note toujours g la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt .$$

2-1. Calculer la limite en 0^+ de la fonction $t \mapsto \frac{g^2(t)}{t}$.

2-2. Montrer que, pour tout réel $b > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, b]$ et que

$$\int_0^b \psi(f)^2(t) dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2} dt = -b\psi(f)^2(b) + 2 \int_0^b f(t)\psi(f)(t) dt. \quad (1)$$

2-3. En déduire que, pour tout réel $b > 0$,

$$\int_0^b \psi(f)^2(t) dt \leq 2 \left(\int_0^b f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^b \psi(f)^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2-4. Conclure que $\psi(f) \in E_2$ et que $\|\psi(f)\| \leq 2\|f\|$.

2-5. On note ψ_2 l'endomorphisme induit par ψ sur E_2 . Que peut-on alors dire de ψ_2 en tant qu'endomorphisme de l'espace vectoriel normé $(E_2, \|\cdot\|)$?

3. Soit f un élément de E_2 .

3-1. En utilisant la formule (1) montrer que la fonction $x \mapsto x\psi(f)^2(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

3-2. Montrer alors que $(\psi(f)|\psi(f)) = 2(f|\psi(f))$.

4. Soit $f \in E_2$ une fonction telle que $\|\psi(f)\| = 2\|f\|$. Calculer $\|\psi(f) - 2f\|^2$ et montrer que f est la fonction nulle.

Quatrième partie

1. On considère un réel $a > 0$ et on note f_a la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f_a(x) = e^{-ax}$, $x \geq 0$.

1-1. Montrer que la fonction $f_a \in E_2$ et calculer $\|f_a\|^2$.

1-2. Calculer $\psi(f_a)(x)$ pour tout $x \geq 0$ puis donner les valeurs de $(f_a|\psi(f_a))$ et de $\frac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|}$.

2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \geq 0$.

2-1. Calculer $\psi(f)(x)$ pour tout $x \geq 0$.

2-2. Vérifier que $f \in E_2$ et montrer que $(f|\psi(f)) = \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t} \right) dt$.

2-3. Trouver une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t} + \frac{\ln t}{1+t}$ puis calculer $\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$.

3. Montrer plus généralement que si $f \in E_2$ est positive, décroissante et non nulle, alors

$$\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} > \sqrt{2}.$$

4. 4-1. Montrer que l'application $f \mapsto \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$ est continue sur $E_2 \setminus \{0\}$.

4-2. En déduire que $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} ; f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$ est un intervalle contenu dans $]0, 2[$.

5. Dans cette question, on va montrer ces deux ensembles coïncident.

5-1. Pour tout $s \in]-1, -\frac{1}{2}[$ on note f_s la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f_s(0) = 0, f_s(t) = t^s \quad \text{si } t \geq 1, \text{ et } f_s \text{ affine sur } [0, 1].$$

5-1-1. Vérifier que $f_s \in E_2$ et calculer $\|f_s\|^2$ en fonction de s puis en donner un équivalent lorsque s tend vers $-\frac{1}{2}$.

5-1-2. Calculer $\|\psi(f_s)\|^2$ en fonction de s et en donner un équivalent lorsque s tend vers $-\frac{1}{2}$.

5-1-3. En déduire que la borne supérieure de l'ensemble $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} ; f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$ vaut 2.

5-2. Soit $\alpha > 0$; on note f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f(t) = t^\alpha \quad \text{si } t \in [0, 1], \text{ et } f(t) = t^{-\alpha-1} \quad \text{si } t \in [1, +\infty[.$$

5-2-1. Vérifier que $f \in E_2$ et calculer $\|f\|^2$ en fonction de α .

5-2-2. Calculer $\|\psi(f)\|^2$ en fonction de α et en donner un équivalent au voisinage de $+\infty$.

5-2-3. En déduire que la borne inférieure de l'ensemble $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} ; f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$ est nulle.

,

CONCOURS MAROCAIN 2006 : *Maths I, MP*

Première partie

1) a) Au voisinage de 0 : On sait que $e^t = 1 + t + o(t)$, donc $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = b - a + o(1) \sim b - a$ intégrable au voisinage de 0.

Au voisinage de $+\infty$: On sait que $e^{-at} = o\left(\frac{1}{t}\right)$, donc $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable au voisinage de $+\infty$.

b) $I(a, b) = -I(b, a)$, très évident.

Posons : $u = ta$, donc :

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\frac{b}{a}u}}{u} du = I\left(1, \frac{b}{a}\right).$$

c) i. L'application : $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[\times \mathbb{R}^*$ en tant que somme, rapport de fonctions continue, qui ne s'annule pas. En $(x, 0)$ on a : $f(x, t) \sim x - 1$ continue, donc f est continue sur $[1, +\infty[\times \mathbb{R}$.

D'autre part : pour $x \in [a, b] \subset [1, +\infty[$ on a :

$$\left| \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \right| = \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \leq \frac{e^{-t} - e^{-bt}}{t} \text{ qui est continue, intégrable sur }]0, +\infty[, \text{ donc } \varphi \text{ est continue sur } [1, +\infty[.$$

ii. Pour $x \in [a, b] \subset [1, +\infty[$ on a : $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = e^{-xt} \leq e^{-at}$ continue, intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, +\infty[$, avec

$$\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

iii. D'après le raisonnement fait dans la question précédente, on a :

$\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, donc $\varphi(x) = \ln x + K$, or $\varphi(1) = 0$, d'où $K = 0$ et donc $\varphi(x) = \ln x$.

d) Si $b \geq a$, alors $x = \frac{b}{a} \geq 1$, donc $I(a, b) = I(1, \frac{b}{a}) = \varphi\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
Si $b \leq a$, alors $x = \frac{a}{b} \geq 1$, donc :
 $I(a, b) = -I(b, a) = -I(1, \frac{a}{b}) = -\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
Conclusion : $I(a, b) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

2) a) Au voisinage de 0 : on sait que $\ln(1+t) = t + o(t)$, d'où $\frac{\ln(1+t)}{t} \sim 1$ intégrable au voisinage de 0, donc $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

b) Posons $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$ est égal à 1, dont la somme est $\frac{\ln(1+x)}{x}$, puisqu'il s'agit de son développement en série entière.

c) Pour $x \in [0, 1]$ fixé, on vérifie facilement que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$ est une série alternée, donc vérifie le critère spécial, en particulier la majoration du reste par son 1^{er} terme, donc $\left| \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k \right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \right| \leq \frac{1}{n+1}$, donc le reste converge uniformément vers 0, et par suite la convergence de la série sur $[0, 1]$ est uniforme.

$$\begin{aligned}
d) \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n dt \quad \text{D'après 2.2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n+1} t^n dt \\
&\text{Car la convergence est uniforme sur } [0,1] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2} \\
&\text{On divise la somme en deux } n = 2p, n = 2p+1 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} \\
&\text{Car } \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
&\text{Car } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

Deuxième partie

- 1) a) g est de classe \mathcal{C}^1 , en tant que primitive de f qui est continue.
On a $\psi(f)(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour $x > 0$, donc ψ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
Pour $x \neq 0$, le théorème des accroissements finis, donc $g(x) - g(0) =$

$xg'(c)$ avec c compris entre 0 et x , d'où $\psi(f)(x) = f(c) \rightarrow f(0) = \psi(f)(0)$ car $g(0) = 0$ et $g' = f$ continue, donc $\psi(f)$ est continue sur \mathbb{R}^+ , autrement dit $\psi(f) \in E$.

- b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lambda \implies \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$ tel que $|f(t) - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \geq A$, donc pour $x \geq A$ on a :

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \lambda| &= \frac{1}{x} \left| \int_0^x f(t) dt - \lambda x \right| \\
&= \frac{1}{x} \left| \int_0^x f(t) dt - \int_0^x \lambda dt \right| \\
&= \frac{1}{x} \left| \int_0^x (f(t) - \lambda) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - \lambda| dt \\
&= \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \lambda| dt + \frac{1}{x} \int_x^A |f(t) - \lambda| dt \\
&= \frac{K}{x} + \frac{1}{x} \int_x^A |f(t) - \lambda| dt \\
&\leq \frac{K}{x} + \frac{1}{x} \int_x^A \frac{\varepsilon}{2} dt \\
&= \frac{K}{x} + \frac{x-A}{x} \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{K}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{car } \frac{x-A}{x} \leq 1 \\
&\leq \varepsilon \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K}{x} = 0
\end{aligned}$$

La réciproque est fautive, prenons pour contre-exemple la fonction $f(t) = \cos t$, on a : $\psi(f)(x) = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ n'existe pas.

- c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty \implies \forall B > 0, \exists A > 0$ tel que $f(t) \geq \frac{B}{2} \quad \forall t \geq A$, donc

$$\begin{aligned}\varphi(f)(x) &= \frac{1}{x} \left(\int_0^A f(t)dt + \int_A^x f(t)dt \right) \\ &\geq \frac{1}{x} \left(K + \frac{B}{2}(x-A) \right) \\ &= \frac{K}{x} + \frac{x-AB}{2x} \\ &\geq B \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K}{x} + \frac{x-AB}{2x} = \frac{B}{2}\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(f)(x) = +\infty$.

- d) i. Dans $\psi(h)$ on va utiliser une intégration par partie, en posant $u = x, v' = f$, donc $u' = 1, v = g$, d'où :

$$\begin{aligned}\psi(h)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{x} \left([tg(t)]_0^x - \int_0^x g(t) dt \right) \\ &= g(x) - \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = g(x) - \psi(g)(x)\end{aligned}$$

- ii. f est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$, d'après la question 1.2) $\psi(h)$ admet aussi la même limite en $+\infty$, or $\psi(h) = g - \psi(g)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(h)(x) = 0$.

La réciproque n'est pas toujours vraie, prenons pour contre-exemple $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$, non intégrable au voisinage de 0, car $\frac{e^{-x}}{x} \sim \frac{1}{x}$, alors que $\psi(h)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t} dt = \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) \rightarrow 0$, quand $x \rightarrow +\infty$.

- e) $\sqrt{f} \geq 0$ et $x \geq 0$, donc $\psi(\sqrt{f})(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{f(t)} dt \geq 0$.

D'autre part : en utilisant l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et

$$\begin{aligned}\sqrt{f}, \text{ on aura : } \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{f(t)} dt &\leq \frac{1}{x} \sqrt{\int_0^x dt} \sqrt{\int_0^x f(t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt} = \sqrt{\psi(f)}\end{aligned}$$

On aura égalité, s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-schwarz

pour 1 et \sqrt{f} , donc s'ils sont proportionnels, c'est à dire f est constante.

- 2) a) Il est clair que $\psi(f + \lambda g) = \psi(f) + \lambda \psi(g)$, n'oubliez pas de le mentionner pour $x = 0$, donc ψ est linéaire.

D'autre part d'après 1.1) $\psi(f) \in E, \forall f \in E$, donc ψ est un endomorphisme de E .

- b) $f \in \text{Ker}(\psi) \implies \psi(f)(x) = 0, \forall x > 0$

$$\implies g(x) = \int_0^x f(t) dt = 0, \forall x > 0$$

$$\implies g'(x) = f(x) = 0, \forall x \geq 0$$

Donc ψ est injective.

- c) D'après 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ , donc toute fonction de E qui ne l'est pas ne peut pas être de la forme $\psi(f)$, c'est à dire n'admet pas d'antécédant, donc ψ n'est pas surjective. $F(x) = |x-1|$ est un exemple de fonction de E qui n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ , car non dérivable en 1.

- 3) a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficients non constant, dont la solution est :

$$f(x) = K e^{-\int_0^x \frac{\lambda-1}{\lambda} t dt} = K e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} \ln x} = K x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

- b) f est prolongeable en 0^+ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ est finie

$$\text{si et seulement si } \frac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0 \text{ si et seulement si } 0 < \lambda \leq 1.$$

- 4) a) 0 ne peut pas être une valeur propre de ψ car elle est injective.

- b) Soit $f \in E$ non nulle telle que $\psi(f) = \mu f$, donc $f = \frac{1}{\mu} \psi(f)$ car $\mu \neq 0$ d'après 4.1). De plus d'après 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ , donc f aussi.

- c) Soit λ valeur propre de ψ et f vecteur propr associé, donc $\psi(f)(x) = \lambda f(x)$, d'où $\int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x)$, en dérivant cette égalité on obtient : $\lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0$, dont les solutions sont : $f(x) = K x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, dérivables sur $]0, +\infty[$ pour tout $\lambda \in]0, 1[$.

Troisième partie

1) a) Pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-

$$\begin{aligned} \text{Schwarz : } \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| &\leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \\ &\leq M = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)dt} \end{aligned}$$

Donc fg est intégrable sur \mathbb{R}^+

b) Il est clair que l'application nulle est de carré intégrable, donc appartient à E_2 , d'autre part, soit $(f, g) \in E_2, \lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$(f + \lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + g^2$ car f^2, fg, g^2 sont toutes intégrables, donc $f + \lambda g \in E_2$ et par suite E_2 est un sous-espace vectoriel de E .

- c) – Symétrie : $(f, g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)dt = (g, f)$.
 – Bilinearité : $(f + \lambda g, h) = (f, h) + \lambda(g, h)$, car l'intégrale est linéaire, d'où la linéarité à gauche, à l'aide de la symétrie on conclut la bilinéarité.
 – Positive : $(f, f) = \int_0^{+\infty} f^2(t)dt \geq 0$.
 – Définie : $(f, f) = 0 \implies \int_0^{+\infty} f^2(t)dt = 0 \implies f^2 = 0$, car f^2 continue positive, donc $f = 0$.

2) a) $\frac{g^2(t)}{t} = g(t)\psi(f)(t) \longrightarrow g(0)\psi(f)(0) = 0$, quand $t \longrightarrow 0^+$, car g et $\psi(f)$ sont continues sur \mathbb{R}^+ et $g(0) = 0$.

b) $\frac{g^2(t)}{t^2} = (\psi(f)(t))^2 \longrightarrow (\psi(f)(0))^2$, quand $t \longrightarrow 0^+$, car $\psi(f)$ est continue sur \mathbb{R}^+ , donc $t \mapsto \frac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, b]$ car prolongeable par continuité en 0^+ .

D'autre part : $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt$, par définition de $\psi(f)$, pour l'autre égalité on va utiliser une intégration par parties, avec $u = g^2(t), v' = \frac{1}{t^2}$, donc $u' = 2g'(t)g(t)$ et $v = -\frac{1}{t}$, d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt &= \left[-\frac{g^2(t)}{t} \right]_0^b + 2 \int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\ &= -\frac{g^2(b)}{b} + 2 \int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\ &\quad \text{car : } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g^2(t)}{t} = 0 \\ &= -\frac{g^2(b)}{b} + 2 \int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \\ &\quad \text{car : } g'(t) = f(t), \frac{g(t)}{t} = \psi(f)(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_0^b \psi(f)^2(t)dt &\leq 2 \int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \quad \text{D'après (1)} \\ &\leq 2 \sqrt{\int_0^b f^2(t)dt} \sqrt{\int_0^b \psi(f)^2(t)dt} \\ &\quad \text{D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.} \end{aligned}$$

Si $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = 0$, c'est terminé, sinon on peut simplifier avec et on obtient encore le résultat demandé.

- d) Découle immédiatement de 2-4) en faisant tendre b vers $+\infty$.
 e) D'après 2-5) on peut conclure que ψ_2 est 2-lipshitzienne, donc continue.

- 3) a)
 b) Faire tendre b vers $+\infty$ dans (1), en utilisant 3-1).

$$\begin{aligned} \text{4) } \|\psi(f) - 2f\|^2 &= (\psi(f) - 2f, \psi(f) - 2f) \\ &= (\psi(f), \psi(f)) - 4(\psi(f), f) + 4(f, f) \\ &= \|\psi(f)\|^2 - 4(\psi(f), f) + 4\|f\|^2 \\ &= -4(\psi(f), f) + 8\|f\|^2 \quad \text{Car : } \|\psi(f)\| = 2\|f\| \\ &= -4(\psi(f), f) + 2\|\psi(f)\|^2 \quad \text{Car : } \|\psi(f)\| = 2\|f\| \\ &= 0 \quad \text{D'après 3-2)} \end{aligned}$$

Donc $\psi(f) - 2f = 0$, ainsi si $f \neq 0$, on aurait 2 est une valeur propre de ψ , impossible puisque les valeurs propres de ψ sont les $\lambda \in]0, 1]$.

Quatrième partie

1) a) $f_a^2(x) = e^{-2ax}$ est évidemment intégrable sur \mathbb{R}^+ , avec :

$$\|f_a\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2ax} dx = \frac{1}{2a}.$$

b) Pour $x \neq 0$, on a : $\psi(f_a)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-at} dt = \frac{1 - e^{-ax}}{ax}$.

Pour $x = 0$, on a : $\psi(f_a)(0) = f_a(0) = 1$.

$$\begin{aligned} (f_a, \psi(f_a)) &= \int_0^{+\infty} f_a(x) \psi(f_a)(x) dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-2ax}}{x} dx \\ &= \frac{1}{a} I(a, 2a) \end{aligned}$$

$$= \frac{\ln a}{a} \quad \text{D'après 1-4 de la 1ère partie}$$

$$\left(\frac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|} \right)^2 = 2a(\psi(f_a), \psi(f_a)) \quad \text{D'après 1-1}$$

$$= 4a(f_a, \psi(f_a)) \quad \text{D'après 3-2, 3ème partie}$$

$$= 4 \ln a$$

$$\text{D'où : } \frac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|} = 2\sqrt{\ln a}.$$

2) a) Pour $x \neq 0$, on a : $\psi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Pour $x = 0$, on a : $\psi(f)(0) = f(0) = 1$.

b) Au voisinage de 0 : $f^2(x) \sim 1$

Au voisinage de $+\infty$: $f^2(x) \sim \frac{1}{x^2}$, donc f^2 est intégrable sur \mathbb{R}^+ , or f continue, donc $f \in E_2$.

$$\begin{aligned} (f|\psi(f)) &= \int_0^{+\infty} f(t) \psi(f)(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} dt + \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1+u}{1+u}\right)}{1+u} du \quad \text{Avec : } u = \frac{1}{t} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} + \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{1+t} \right) dt \quad \text{On remplace u par t} \\ &= \int_0^1 \frac{(1+t) \ln(1+t) - t \ln t}{t(1+t)} dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t} \right) dt \end{aligned}$$

c) $(\ln t \ln(1+t))' = \frac{\ln(1+t)}{t} + \frac{\ln t}{1+t}$, donc $\ln t \ln(1+t)$ est une primitive de $\frac{\ln(1+t)}{t} + \frac{\ln t}{1+t}$.

Calculons d'abord : $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ et $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$, en effet :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = [\ln t \ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$$

Intégration par parties avec :

$$u = \ln(1+t) \quad v' = \frac{1}{t}$$

$$u' = \frac{1}{1+t} \quad v = \ln t$$

$$= - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$$

Car au voisinage de 0^+ : $\ln t \ln(1+t) \sim t \ln t \rightarrow 0$

3)

4) a) les application $f \mapsto \|f\|$ et $f \mapsto \psi(f)$ sont continue, or $f \neq 0$, donc l'application $f \mapsto \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$ est continue en tant que composée et rapport d'applications continues.

b) $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \text{ tel que } f \in E_2 - 0 \right\}$ est un connexe dans \mathbb{R} en tant qu'image d'un connexe par une application continue, d'autre part : $0 < \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} < 2$, puisque $\psi(f)$ est injective et d'après la question 2-4) 3ème partie, donc c'est un intervalle contenu dans $]0, 2[$.

5) a) i. L'application f est définie ainsi :

$$\begin{aligned} f(t) &= t^s & \text{si : } 0 \leq t \leq a \\ &= -a^s(t - a - 1) & \text{si : } a \leq t \leq a + 1 \\ &= 0 & \text{si : } t \geq a + 1 \end{aligned}$$

f^2 est intégrable car son intégrale sur \mathbb{R}^+ est égale à celui sur

$$\begin{aligned} [0, a + 1], \text{ avec : } \|f\|^2 &= \int_0^a t^{2s} dt - a^{2s} \int_a^{a+1} (t - a - 1)^2 dt \\ &= \frac{a^{2s+1}}{2s+1} - \frac{a^{2s}}{3} \sim \frac{a^{2s+1}}{2s+1} \end{aligned}$$

ii. D'abord pour $0 \leq x \leq a$, on a :

$$\psi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x t^s dt = \frac{x^s}{s+1}, \text{ car :}$$

$$2s + 1 > 0 \implies s > -\frac{1}{2} \implies s + 1 > 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{s+1} = 0.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \|\psi(f)\|^2 &= \int_0^{+\infty} \psi(f)^2(x) dx \geq \int_0^a \psi(f)^2(x) dx = \\ &= \int_0^a \frac{x^{2s}}{(s+1)^2} dx = \frac{a^{2s+1}}{(s+1)^2(2s+1)} = \frac{2a^{2s+1}}{(s+1)(2s+1)} \cdot \frac{1}{2(s+1)} \geq \\ &= \frac{1}{(s+1)(2s+1)}, \text{ car } 2(s+1) = 2s+2 > 1. \end{aligned}$$

iii. D'après les deux questions précédentes, en faisant tendre a vers

$$+\infty, \text{ on aura : } \sup \left(\frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2} \right) \geq \frac{2}{s+1} \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ tel que } 2s + 1 > 0,$$

donc pour $s \geq -\frac{1}{2}$, en faisant tendre s vers $-\frac{1}{2}$, on obtient : $\sup \left(\frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2} \right) \geq 4$, d'où : $\sup \left(\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \right) \geq 2$, or

d'après la question 4.2) on a : $\sup \left(\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \right) \leq 2$, d'où l'égalité.

b) i. Au voisinage de $+\infty$ on a : $f^2(t) = \frac{1}{t^{2\alpha+2}}$ est bien intégrable car $2\alpha + 2 > 1$, avec :

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_0^{+\infty} f^2(t) dt = \int_0^1 t^{2\alpha} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2\alpha+2}} dt \\ &= \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1}{2\alpha+1} = \frac{2}{2\alpha+1} \end{aligned}$$

ii. Déterminons d'abord $\psi(f)(x)$ pour $x \geq 0$.

1er cas : $0 \leq x \leq 1$, alors :

$$\psi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x t^\alpha dt = \frac{x^\alpha}{\alpha+1}.$$

2ème cas : $x \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned} \psi(f)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \left(\int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\int_0^1 t^\alpha dt + \int_1^x \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{x^\alpha} - 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{x\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\psi(f)\|^2 &= \int_0^{+\infty} \psi(f)^2(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\alpha}}{(\alpha+1)^2} dx + \int_1^{+\infty} \left(\frac{2\alpha+1}{x\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2} + \frac{(2\alpha+1)^2}{\alpha^2(\alpha+1)^2} - \frac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha+1)^2} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2} + \frac{4\alpha^2-1}{\alpha^2(\alpha+1)^2} + \frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \\ &\sim_{+\infty} \frac{4}{\alpha^2} \end{aligned}$$

iii. D'après les deux questions précédentes, on aura : $\inf \left(\frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2} \right) \leq \frac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2}$ pour $\alpha > 0$ assez grand, quand

$\alpha \rightarrow +\infty$, on obtient $\inf \left(\frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2} \right) \leq 0$, or d'après la question 4.2) on a : $\inf \left(\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \right) \geq 0$, d'où l'égalité.

Fin.