My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مُولَايِ اسْمَاعِيل مَمُونِي

Devoir Maison

Séries Entieres

PROBLÈME

CCP 2019

Dans ce sujet une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions L_a : $\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

Q4. Si $x\in \left]-1,1\right[$, donner un équivalent de $1-x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout $x\in \left]-1,1\right[$, la série $\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

<u>Remarque</u> : la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $\left]-1,1\right[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $\left]-1,1\right[$.

Q5. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans l'intervalle $\left]-1,1\right[$.

Q6. On pose, pour tout $x\in \left]-1,1\right[$, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $\left]-1,1\right[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $\left]-1,1\right[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

Q7. Expression sous forme de série entière

On note $A=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right), \text{ où } I_n=\left\{(k,p)\in A,\ kp=n\right\}.$$

Démontrer que pour tout $x\in \left]-1,1\right[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.

En déduire que pour tout $x\in \left]-1,1\right[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n=\sum_{d|n} a_d$

($d|n$ signifiant d divise n).

Partie II - Exemples

Q8. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de *n*. Exprimer, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

Q9. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec *n* et inférieurs à *n*.

Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est de rayon 1.

On admet que pour $n \geq 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

Q10. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Q11. Dans cette question et la suivante, pour $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question **Q6**.

Q12. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1-x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in]0,1[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}$.

EXERCICE I

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour $t \in]0,+\infty[$, $f(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$.

Q1. Justifier que la fonction *f* est intégrable sur $]0,+\infty[$ puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \mathrm{d}t$.

FIN

INP-M1-2019

EXERCICE I

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour $t\in]0,+\infty[$, $f(t)=\dfrac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$

Q1. L'application $t\longmapsto \dfrac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$

— En 0^+: $f(t)=\dfrac{t+o(t)}{t+o(t)}=1+o(1)$, donc elle est prolongeable par continuité en 0^+, donc elle est intégrable en 0

— En $+\infty$: $f(t)\sim te^{-t}=o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc elle est intégrable par la règle de Riemann

Donc f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $t>0$, on a $\forall x\in]-1,1[$: $\dfrac{x}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}x^n$. Comme $e^{-t}\in]0,1[$, alors

$$\frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}=\sum_{n=1}^{+\infty}te^{-nt}$$

Les fonctions $f_n:t\in]0,+\infty[\longmapsto te^{-nt}$ sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$ et, en vertu de l'étude qui précède, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}f_n$ converge simplement et sa somme f est continue sur $]0,+\infty[$

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0,+\infty[$ et par une intégration par parties

$$\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}te^{-nt}\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}$$

Avec $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit, par le théorème d'intégration terme à terme, que

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{n^2}$$

INP-M1-2019

PROBLÈME

Q5. Soit $b \in [0,1[$ et $x \in [-b,b]$, on a: $\left|a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}\right| \leqslant |a_n| \dfrac{b^n}{1-b^n}$. D'autre part $|a_n| \dfrac{b^n}{1-b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n| b^n$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n b^n$ converge absolument car elle est de rayon 1. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge normalement, puis uniformément, sur le segment $[-b,b]$

Q6. On pose, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$

<u>**Continuité:**</u> Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in]-1,1[\longmapsto a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n est continue sur $]-1,1[$

— Soit $[-b,b] \subset]-1,1[$. D'après la question **Q5**, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[-b,b]$

Par le théorème de la contuinuité de la fonction somme f est continue sur $]-1,1[$

<u>**Régularité de $\mathcal{C}^1$:**</u>

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[\,, \quad f_n'(x) = a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

— Soit $[-b,b] \subset]-1,1[$
Pour $x \in [-b,b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$|f_n'(x)| \leqslant |a_n| \frac{n|x|^{n-1}}{(1-x^n)^2} \leqslant |a_n| \frac{nb^{n-1}}{(1-b^n)^2}$$

D'autre part $|a_n| \dfrac{nb^{n-1}}{(1-b^n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n|a_n| b^n$ et la série dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 1} na_n b^n$ converge absolument car elle est de même rayon que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n b^n$. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \dfrac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$ converge normalement, puis uniformément, sur le segment $[-b,b]$.

Par le théorème de dérivation terme à terme la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1,1[$.

$$\forall x \in]-1,1[\,, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

En particulier $f'(0) = a_1$

Q7. **Expression sous forme de série entière**
On note $A = N^* \times \mathbb{N}^*$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'élément $(1,n) \in I_n$, donc $I_n \neq \emptyset$

— Soit $m,n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \neq n$. Si $(p,q) \in I_n \cap I_m$, alors $n = pq = m$, donc $m = n$. Absurde

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n \subset A$, donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \subset A$. Inversement si $(p,q) \in A$, on pose $n = pq$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(p,q) \in I_n$, ainsi $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$. D'où $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = A$

On conclut que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de A. Alors par le théorème de sommation par paquets

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{(n,p)\in A} u_{n,p} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right)$$

On montre que pour tout $x \in]-1,1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.

INP-M1-2019

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la série géométrique $\sum_{p\geqslant 1} |a_n|\,|x^{np}|$ de raison $|x^n| \in [0,1[$ est convergente de somme $\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n|\,|x^{np}| = |a_n| \dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$

— On a $|a_n| \dfrac{|x|^n}{1-|x|^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n|\,|x|^n$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ converge absolument car elle est de rayon 1. Donc $\sum_{n\geqslant 1} |a_n| \dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$ converge.

Donc par le théorème de Fubini, la famille la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable

— Déduction:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{(n,p)\in A} a_n x^{np} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p)\in I_n} a_k x^{kp} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p)\in I_n} a_k \right) x^n
\end{aligned}$$

Mais $\sum_{(k,p)\in I_n} a_k = \sum_{k|n} a_k$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum_{k|n} a_k$

Partie II: Exemple

Q8. D'après la question **Q7**, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

Où $b_n = \sum_{k|n} 1 = d_n$. Ainsi $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$

Q9. Dans cette question, pour $n \geqslant 1, a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec n et inférieurs à n.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leqslant \varphi(n) \leqslant n$, donc $\mathcal{R}_c\left(\sum_{n\geqslant 1} nx^n\right) \leqslant \mathcal{R}_c\left(\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n\right) \leqslant \mathcal{R}_c\left(\sum_{n\geqslant 1} x^n\right)$.

Or $\mathcal{R}_c\left(\sum_{n\geqslant 1} nx^n\right) = \mathcal{R}_c\left(\sum_{n\geqslant 1} nx^n\right) = 1$, donc $\mathcal{R}_c\left(\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n\right) = 1$

— L'ensemble des diviseurs entiers de 12 est $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$ et par définition

$$\begin{cases} \varphi(1) = \varphi(2) = 1 \\ \varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(6) = 2 \\ \varphi(12) = 4 \end{cases}$$

On a bien $\sum_{d|12} \varphi(d) = 12$

— Soit $x \in]-1,1[$, d'après la question **Q7**, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{d|n} \varphi(d) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$, alors $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

Q10. La fonction $\ln(1+x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

— La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge simplement sur $[0,1[$

— Pour tout $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 1}$ est de réels positifs, indépendante de x, et de limite nulle, donc la suite de fonctions des restes de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge uniformément vers $\tilde{0}$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \in \mathbb{R}$

Par le théorème de la double limite

$$\ln(2) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

Q11. Soit $b \in [0,1[$ et $x \in [-b,b] \setminus \{0\}$.

— On a: $\left| a_n \dfrac{x^{n-1}}{1-x^n} \right| \leqslant |a_n| \dfrac{b^{n-1}}{1-b^n}$. D'autre part $|a_n| \dfrac{b^{n-1}}{1-b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n| b^{n-1}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n b^{n-1}$ converge absolument car elle est de rayon 1. Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$ converge normalement, puis uniformément, sur $[-b,b] \setminus \{0\}$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \dfrac{x^{n-1}}{1-x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} a_1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$. Par le théorème de la double limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^{n-1}}{1-x^n} = a_1 = -1$$

Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$

— On conclut que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$

Q12. Pour tout $x \in [0,1[$, on a $(1-x)f(x) = (1-x)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{1-x^n}$.

— Soit $n \geqslant 1$ et $x \in [0,1[$, on a

$$\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} - \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^n(x-1)}{(1-x^{n+1})(1-x^n)} \leqslant 0$$

et $\dfrac{x^n}{1-x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n (1-x) \frac{x^n}{1-x^n}$ est alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées, alors elle converge

INP-M1-2019

— Pour tout $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^n(1-x)\frac{x^n}{1-x^n}\right| \leqslant (1-x)\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} = \frac{x^{n+1}}{\sum\limits_{k=0}^{n} x^k}$$

En introduisant l'application ψ_n définie sur $[0,1[$, par $\psi_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{\sum\limits_{k=0}^{n} x^k}$. Une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^1$, par les théorèmes généraux, et $\forall x \in [0,1[$:

$$\begin{aligned}
\psi_n'(x) &= \frac{(n+1)x^n\sum\limits_{k=0}^{n} x^k - x^{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}}{\left(\sum\limits_{k=0}^{n} x^k\right)^2} \\
&= \frac{(n+1)x^n + \sum\limits_{k=1}^{n}(n+1-k)x^{n+k}}{\left(\sum\limits_{k=0}^{n} x^k\right)^2} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Donc ψ_n est croissante sur $[0,1[$, avec $\psi_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \psi_n(x) = \dfrac{1}{n+1}$, on gagne

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^n(1-x)\frac{x^n}{1-x^n}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

La suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 1}$ est de réels positifs, indépendante de x, et de limite nulle, donc la suite de fonctions des restes de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n(1-x)\dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément vers $\tilde{0}$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(-1)^n(1-x)\dfrac{x^n}{1-x^n} = (-1)^n\dfrac{x^n}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R}$.

Par le théorème de la double limite

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

Ainsi au voisinage de 1, $f(x) \sim \dfrac{-\ln 2}{1-x}$.