Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مُوني مُولَاي اسْمَاعِيل

Devoir Maison

Espaces Vectoriels Normés

e3a 2007

L'usage de la calculatrice est interdit

Objectifs.

Le but du problème est d'étudier, dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, la distance d'un vecteur à un hyperplan.

Dans la partie I, on étudie un exemple dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Dans la partie II, on étudie le cas de la dimension finie, puis on montre que les hyperplans sont fermés ou denses.

Dans la partie III, on étudie le cas des hyperplans denses.

Dans la partie IV, on étudie un exemple d'hyperplan fermé.

Les quatre parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients réels, on le munit du produit scalaire défini par :

$$(A|B) = \operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$$

où A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est la transposée de la matrice A et $\operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$ est la trace de la matrice ${}^tAB$.

Soit $F = (f_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} f_{i,i} = 1, \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n. \\ f_{i,1} = 1 \text{ pour } 2 \leqslant i \leqslant n. \\ f_{i,n} = 1 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1. \\ f_{i,j} = 0 \text{ dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

On note H l'ensemble des matrices X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(F|X) = 0$.

1) Montrer que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) On note $X = (x_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, exprimer $(F|X)$ en fonction des $x_{i,j}$.

3) On rappelle que la distance d 'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'hyperplan H est définie par :

$$d(M,H) = \inf_{U\in H} \|M - U\|$$

où la norme $\|\|$ est la norme associée au produit scalaire $(\ |\ )$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que :

$$d(M,H) = \frac{|(F|M)|}{\|F\|}.$$

4) Calculer $\|F\|$ en fonction de n.

5) On note $B = F - I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

   a) Déterminer le rang de B.

   b) Calculer B^2, montrer que B^2 et B ont le même rang.

   c) On appelle g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, tel que la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ soit la matrice B.
   On rappelle que $\mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im} g$ désignent respectivement, le noyau et l'image de l'endomorphisme g. Montrer que :

   $$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker} g \oplus \mathrm{Im} g$$

   d) En déduire que la matrice B est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ où B' est une matrice carrée d'ordre 2 inversible.

   e) Calculer les traces , $\mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}\left(B^2\right)$, des matrices B et B^2, en déduire les valeurs propres de B'.

   f) En déduire les valeurs propres de F ainsi que la dimension des sous-espaces propres associés.

6) Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $k \geqslant 0$, de la forme $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, on définit $P\left({}^tF\right)$ par :

$$P\left({}^tF\right) = a_0 I_n + \sum_{i=1}^{k} a_i \left({}^tF\right)^i.$$

Calculer la distance de la matrice $P\left({}^tF\right)$ à l'hyperplan H en fonction de P.
On pourra utilement poser : $S(X) = XP(X)$ et calculer $S\left({}^tF\right)$.

Partie II.

H est un hyperplan d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E, h est une forme linéaire non nulle sur E, dont le noyau est égal à H.

1) Dans cette question, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, on désigne par x_0 un vecteur de E.

a) On note $d(x_0, H)$ la distance de x_0 à l'hyperplan H. Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n \geqslant 0}$ d' éléments de H tels que :

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H) \cdot$$

b) Montrer qu'il existe une suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n \geqslant 0}$ extraite de la suite $(y_n)_{n \geqslant 0}$ qui converge vers un élément de H.

c) En déduire qu'il existe y_0 appartenant à l'hyperplan H tel que :

$$d(x_0, H) = \|x_0 - y_0\| \cdot$$

On dit que la distance de x_0 à l'hyperplan H est atteinte en y_0.

2) On suppose dans cette question que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque.

a) Montrer que si h est une forme linéaire continue sur E alors le noyau, Ker$h$, est fermé dans E.

b) Montrer que si le noyau, Ker$h$, de h est fermé alors h est continue. On pourra montrer que, si h n'est pas continue, alors il existe une suite $(t_n)_{n \geqslant 0}$ de E telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0. \\ h(t_n) = 1, \text{ pour tout entier } n. \end{cases}$$

Puis, on utilisera la suite $(t_n - t_0)_{n \geqslant 0}$ pour mettre en évidence une contradiction.

c) Montrer que si H est un hyperplan de E alors l'adhérence $\overline{H}$ de H est un sous-espace vectoriel de E.

d) En déduire que tout hyperplan de E est fermé ou dense, c'est à dire $\overline{H} = H$ ou $\overline{H} = E$.

Partie III.

On suppose dans cette partie que E est un espace préhilbertien muni du produit scalaire : $\begin{array}{ccc} E \times E & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (x|y) \end{array}$ et que H est un hyperplan dense de E, c'est à dire $\overline{H} = E$.

1) Déterminer $H^{\perp}$, l'orthogonal de H.

2) Que dire de $H \oplus H^{\perp}$?

3) Pour tout vecteur x de E, calculer la distance $d(x, H)$.

4) La distance $d(x, H)$ est-elle toujours atteinte? Justifier.

Partie IV.

On suppose dans cette partie que H est un hyperplan fermé, d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension quelconque. H est le noyau de la forme linéaire h, continue non nulle sur E. x_0 désigne un vecteur fixé de E. On rappelle que la norme de l'application h subordonnée à la norme de E est définie par :

$$|||h||| = \sup_{x \neq 0} \frac{|h(x)|}{\|x\|}.$$

1) a) Montrer que, pour tout élément y de H on a :

$$\|x_0 - y\| \geqslant \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$$

b) En déduire que la distance de x_0 à l'hyperplan H est supérieure ou égale à $\dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||}$.

c) Montrer que $d(x_0, H) = 0$ si et seulement si $x_0 \in H$.

d) On considère dans cette question $x_0 \notin H$.

α) Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $E \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$|||h||| = \lim_{n \to +\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}.$$

β) Montrer que, pour tout entier n, il existe un réel λ_n non nul et un vecteur y_n de H tel que : $w_n = \lambda_n x_0 + y_n$.

γ) Prouver que, pour tout entier n :

$$\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}.$$

e) En déduire que, pour tout vecteur x_0 de E, on a :

$$d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}.$$

2) Dans cette question, E est l'ensemble des suites réelles de limite nulle, on munit cet ensemble de la norme infinie, c'est à dire que si $u \in E$ alors $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ et $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$, E est ainsi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

h est l'application définie de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}.$$

a) Montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ est convergente.

b) Montrer que h est une forme linéaire continue non nulle sur E, en déduire $|||h||| \leqslant 1$.

c) Soit $(v_p)_{p \geqslant 0}$ une suite d'éléments de E, on notera $v_p(n)$ le terme de rang n de la suite v_p. On définit v_p par :

$$\begin{cases} v_p(n) = 1 \text{ si } 0 \leqslant n \leqslant p. \\ v_p(n) = 0 \text{ si } n \geqslant p+1. \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty}$, en déduire $|||\, h \,|||$.

d) Montrer qu'il n'existe pas d'élément u non nul de E telle que :

$$|||\, h \,||| = \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}.$$

e) On note H le noyau de h, vérifier que H est un hyperplan fermé de E.

f) Montrer que la distance d'un vecteur x de E à l'hyperplan H n'est pas toujours atteinte.

E3A, 2007, MP, Mathématiques A

(5 pages)

Partie I

1) $X \longmapsto (F \mid X)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et elle est non nulle car $(F \mid F) \neq 0$ donc son noyau est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, ainsi, $\underline{H \text{ est un hyperplan de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

2) Posons $Y = {}^tFX$. On a $\forall i \in [\![1, n]\!]^2$ $y_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} f_{ki}\, x_{ki}$ donc $(F \mid X) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f_{ki}\, x_{ki}$ donc , puisque $f_{ki} = 1$ pour $i = k$ ou $i = 1$ ou $i = n$ et $f_{ki} = 0$ sinon, on a $\underline{(F \mid X) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{kk} + \sum\limits_{k=2}^{n} x_{k1} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_{kn}}$.

3) Par définition de H, on a $F \in H^{\perp}$ donc, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathbb{R}.F$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut donc écrire $M = N + \lambda F$ avec $N \in H$ et $\lambda F \in H^{\perp}$ et, en prenant le produit scalaire avec F, $(F \mid M) = (F \mid N) + \lambda\|F\|^2 = \lambda\|F\|^2$ donc $\lambda = \dfrac{(F \mid M)}{\|F\|^2}$. On a donc $\forall U \in H,\ M - U = (N - U) + \lambda F$ avec $N - U \in H$. Donc le théorème de Pythagore donne $\|M - U\|^2 = \|N - U\|^2 + \lambda^2\|F\|^2 \geqslant \lambda^2\|F\|^2 = \dfrac{(F \mid M)^2}{\|F\|^2}$ donc $\underline{d(M, H) = \dfrac{|(F \mid M)|}{\|F\|}}$.

4) $\|F\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f_{ki}^2 = n + 2(n-1) = 3n - 2$ donc $\underline{\|F\| = \sqrt{3n-2}}$.

5) a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\underline{\mathrm{rg}(B) = 2}$.

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\underline{\mathrm{rg}(B^2) = \mathrm{rg}(B) = 2}$.

c) D'après le théorème du rang, $\dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(g)\big) = n$ et si $x \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(g)$, on a $g(x) = 0_E$ et il existe y tel que $x = g(y)$ donc $g^2(y) = 0_E$. Ainsi $y \in \mathrm{Ker}(g^2)$. Mais $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(g^2)$ et $\dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) = n - 2 = \dim\big(\mathrm{Ker}(g^2)\big)$ puisque, selon [**b**], $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(g^2)$ donc $\mathrm{Ker}(g^2) = \mathrm{Ker}(g)$. On a donc $y \in \mathrm{Ker}(g)$ donc $x = g(y) = 0_E$. Donc $\underline{\mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^n}$.

d) Prenons une base $\mathcal{B} = \big(e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n\big)$ adaptée à la somme directe ci-dessus. On a $g(e_k) = 0_E$ pour $k \in [\![1, n-2]\!]$ et $g(e_k) \in \operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}\big(e_{n-1}, e_n\big)$ pour tout k et, notamment pour $k \in \{n-1, n\}$. Donc $\operatorname{Mat}(g, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & B' \end{array}\right)$ avec $B' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus,

$$2 = \operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}\left(\operatorname{Mat}(g, \mathcal{B})\right) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} O \\ B' \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\left(O \quad {}^tB'\right) = \operatorname{rg}({}^tB') = \operatorname{rg}(B')$$

donc B' est inversible.

Donc B est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & B' \end{array}\right)$ avec $B' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

e) $\diamond$ On a directement $\operatorname{Tr}(B) = 0,\ \operatorname{Tr}(B^2) = 2$.

$\diamond$ Soient λ et μ, les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de B' (pas forcément distinctes). B' est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et donc B'^2 est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda^2 & c(\lambda+\mu) \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}$. Or, selon [**d**], $\operatorname{Tr}(B) = \operatorname{Tr}(B')$ donc $\lambda + \mu = 0$ et [**d**] donne aussi que B^2 est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & B'^2 \end{array}\right)$ donc $\operatorname{Tr}(B^2) = \operatorname{Tr}(B'^2)$ soit $\lambda^2 + \mu^2 = 2$. On a donc $\mu = -\lambda$ et $2\lambda^2 = 2$ donc $\operatorname{Sp}(B') = \{-1, 1\}$.

f) $F.\vec{x} = \alpha\vec{x} \Leftrightarrow (I_n + B).\vec{x} = \alpha\vec{x}$ donc $F.\vec{x} = \alpha\vec{x} \Leftrightarrow B.\vec{x} = (\alpha - 1)\vec{x}$ donc $\operatorname{Sp}(F) = \big\{1 + \beta \mid \beta \in \operatorname{Sp}(B)\big\}$ et $E_\alpha(F) = E_{\alpha-1}(B)$. Comme $\chi_B = X^{n-2}\,\chi_{B'} = X^{n-2}\,(X+1)(X-1)$, $\operatorname{Sp}(B) = \{-1, 1, 0\}$ et, puisque $m(1) = m(-1) = 1$, $\dim\big(E_{-1}(B)\big) = \dim\big(E_1(B)\big) = 1$. D'autre part, on a $\dim\big(E_0(B)\big) = \dim(\operatorname{Ker} g) = n-2$. Donc $\operatorname{Sp}(F) = \{0, 1, 2\}$ avec $\dim\big(E_0(F)\big) = \dim\big(E_2(F)\big) = 1$ et $\dim\big(E_1(F)\big) = n-2$.

6) D'après la formule du [**3**], il suffit de calculer $(F \mid P({}^tF)) = \operatorname{Tr}\big({}^tF P({}^tF)\big) = \operatorname{Tr}\big(S({}^tF)\big)$ en notant $S(X) = XP(X)$. Or $\dim\big(E_0(F)\big) + \dim\big(E_2(F)\big) + \dim\big(E_1(F)\big) = n$ donc $E_0(F) \oplus E_2(F) \oplus E_1(F) = \mathbb{R}^n$ c'est à dire que F est diagonalisable donc ${}^tF$ également. Ainsi $S({}^tF)$ est semblable à $\operatorname{Diag}\big(S(1), \ldots, S(1), S(0), S(2)\big)$ donc $\operatorname{Tr}\big(S({}^tF)\big) = (n-2)S(1) + S(0) + S(2) = (n-2)P(1) + 2P(2)$. Donc $d\big(P({}^tF), H\big) = \dfrac{\big|(n-2)P(1) + 2P(2)\big|}{\sqrt{3n-2}}$.

Partie II

1) a) Par caractérisation de la borne inférieure, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, y \in H,\quad d(x_0, H) \leqslant \|x_0 - y\| < d(x_0, H) + \varepsilon$. On applique ceci à $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on note y_n un des $y \in H$ vérifiant l'inégalité. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad y_n \in H \quad \text{ et } \quad d(x_0, H) \leqslant \|x_0 - y_n\| < d(x_0, H) + \frac{1}{n+1}$$

donc il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n \in H$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)$.

b) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \|y_n\| = \|y_n - x_0 + x_0\| \leqslant \|y_n - x_0\| + \|x_0\|$ et la suite $\big(\|x_0 - y_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée puisqu'elle converge donc la suite $\big(\|y_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne alors l'existence d'une suite $(y_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ extraite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans E. Mais, quand E est de dimension finie, tous ses sous-espaces vectoriels sont fermés donc H est fermé. Comme $\forall p \in \mathbb{N},\ y_{\varphi(p)} \in H$, on a $z_0 = \lim\limits_{p\to+\infty} y_{\varphi(p)} \in H$. D'autre part, la suite $\big(\|x_0 - y_{\varphi(p)}\|\big)_{p\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $\big(\|x_0 - y_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$

qui converge vers $d(x_0, H)$ donc elle converge vers la même limite. Enfin, par continuité de la norme, $\|x_0 - y_{\varphi(p)}\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x_0 - z_0\|$ et donc, par unicité de la limite, $\|x_0 - z_0\| = d(x_0, H)$.

En conclusion, $\underline{\exists\, z_0 \in H,\ \|x_0 - z_0\| = d(x_0, H)}$.

2) a) Par définition, $\operatorname{Ker} h = h^{-1}\big(\{0_{\mathbb{R}}\}\big)$ et le singleton $\{0_{\mathbb{R}}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Or l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé donc <u>si h est continue alors $\operatorname{Ker} h$ est fermé dans E</u> .

b) Supposons que la forme linéaire h ne soit pas continue, on a $\text{non}\Big(\exists K \geqslant 0,\ \forall x \in E,\ |h(x)| \leqslant K\,\|x\|\Big)$ soit $\forall K \geqslant 0,\ \exists x \in E,\ |h(x)| > K\,\|x\|$. Appliquons ceci à $K = n+1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et notons x_n un $x \in E$ vérifiant la propriété: on a donc $|h(x_n)| > (n+1)\,\|x_n\|$. Ceci montre que $h(x_n) \neq 0$, on peut donc poser $t_n = \dfrac{x_n}{h(x_n)}$. On a alors $h(t_n) = \dfrac{h(x_n)}{h(x_n)} = 1$ et $\|t_n\| = \dfrac{\|x_n\|}{|h(x_n)|} < \dfrac{1}{n+1}$ donc $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_E$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ h(t_n - t_0) = h(t_n) - h(t_0) = 1 - 1 = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n - t_0 \in H$ et $t_n - t_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -t_0$ donc, puisque H est fermé, $-t_0 \in H$. Mais ceci est faux car $h(-t_0) = -h(t_0) = -1$.

L'hypothèse de départ était donc fausse et on a bien <u>si $\operatorname{Ker} h$ est fermé dans E alors h est continue</u> .

c) $\overline{H} \supset H$ donc $\overline{H} \neq 0$ et si $(x,y) \in \overline{H}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la caractérisation séquentielle de l'adhérence donne l'existence de deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ (x_n, y_n) \in H^2,\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x,\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ et alors , par linéarité de la limite, $x + \lambda y = \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + \lambda y_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n + \lambda y_n \in H$ et donc $x + \lambda y \in \overline{H}$. Donc <u>$\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E</u> .

d) Puisque $H \subset \overline{H}$, on a soit $H = \overline{H}$ et, dans ce cas, H est fermé, soit $H \subsetneq \overline{H}$. Si $H \subsetneq \overline{H}$, prenons $a \in \overline{H} \setminus H$ et soit $x \in E$ quelconque. On a $h(a) \neq 0$ puisque $a \notin H$ et on peut donc écrire $x = \dfrac{h(x)}{h(a)}a + \left(x - \dfrac{h(x)}{h(a)}a\right)$ avec $a \in \overline{H}$ et $h\left(x - \dfrac{h(x)}{h(a)}a\right) = h(x) - \dfrac{h(x)}{h(a)}h(a) = 0$ donc $\left(x - \dfrac{h(x)}{h(a)}a\right) \in H \subset \overline{H}$. Puisque $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E, on a donc $x \in \overline{H}$ ce qui donne $E \subset \overline{H}$.

On peut donc conclure : <u>H est fermé ou dense</u> .

Partie III

1) Soit $x \in H^{\perp}$. Par densité de H dans E, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in H$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (x \mid x_n) = 0$. Mais, par continuité du produit scalaire, $(x \mid x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x \mid x)$ donc $(x \mid x) = 0$ et donc $x = 0_E$. Réciproquement $0_E \in H^{\perp}$ donc $\underline{H^{\perp} = \{0_E\}}$.

2) $H \oplus H^{\perp} = H \oplus \{0_E\}$ donc $\underline{H \oplus H^{\perp} = H}$.

3) Pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in H$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. On a, par définition, $0 \leqslant d(x,H) \leqslant \|x - x_n\|$ car $x_n \in H$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = 0$ donc $\underline{\forall x \in E,\ d(x,H) = 0}$.

4) Si $d(x,H)$ est atteinte, il existe $z_0 \in H$ tel que $0 = d(x,H) = \|x - z_0\|$ donc $x = z_0$ et $x \in H$. La réciproque est claire donc <u>$d(x,H)$ n'est atteinte que si $x \in H$</u> .

Partie IV

1) a) On a $\forall x \in E,\ |h(x)| \leqslant |||\, h\, |||\ \|x\|$ donc, pour $x = x_0 - y$, $|h(x_0)| \leqslant |||\, h\, |||\ \|x_0 - y\|$. Or $|||\, h\, ||| \neq 0$ car h est non nulle donc $\underline{\forall y \in H,\ \|x_0 - y\| \geqslant \dfrac{|h(x_0)|}{|||\, h\, |||}}$.

b) La borne inférieure étant le plus grand des minorants, $\underline{d(x_0, H) \geqslant \dfrac{|h(x_0)|}{|||\, h\, |||}}$.

c) Si $d(x_0, H) = 0$, l'inégalité ci-dessus donne $h(x_0) = 0$ donc $x_0 \in H$. La réciproque est évidente donc $\underline{d(x_0, H) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in H}$.

d) α) Par caractérisation de la borne supérieure, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, w \neq 0_E,\quad |||\, h\, ||| \geqslant \dfrac{|h(w)|}{\|w\|} > |||\, h\, ||| - \varepsilon$. On applique ceci à $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on note w_n un de ces $w \neq 0_E$. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ |||\, h\, ||| - \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant |||\, h\, |||$ donc il existe $\underline{(w_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \in E \setminus \{0_E\}$ et $|||\, h\, ||| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$.

β) $\diamond$ Puisque $x_0 \notin H$, on peut écrire tout $x \in E$ sous la forme $x = \dfrac{h(x)}{h(x_0)} x_0 + \left(x - \dfrac{h(x)}{h(x_0)} x_0\right) = \lambda x_0 + y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in H$ (vérification immédiate). Ainsi $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\,(\lambda_n, y_n) \in \mathbb{R} \times H,\ w_n = \lambda_n x_0 + y_n}$.

$\diamond$ Erreur d'énoncé: la condition $\lambda_n \neq 0$ n'est, en général, pas vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit, par exemple, de choisir $w_0 \in H$ pour avoir $\lambda_0 = 0$ car l'écriture ci-dessus est unique puisque la somme $\mathbb{R}.x_0 \oplus H$ est directe. On ne modifie pas la valeur de la limite de $\dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$ en modifiant la valeur de w_0 (ou d'un nombre fini de termes) donc [α] est toujours vérifié.

$\diamond$ Par contre, on a $\underline{\exists\, n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \lambda_n \neq 0}$ car $\dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |||\, h\, ||| > 0$ donc $\exists\, n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} > 0$ donc $\forall n \geqslant n_0,\ h(w_n) \neq 0$ et donc $\lambda_n = \dfrac{h(w_n)}{h(x_0)} \neq 0$.

γ) D'une part, $|h(w_n)| = |\lambda_n h(x_0) + y_n| = |\lambda_n|\, |h(x_0)|$ et, d'autre part, $\forall n \geqslant n_0,\ \|w_n\| = |\lambda_n| \left\| x_0 - \dfrac{-y_n}{\lambda_n} \right\| \geqslant |\lambda_n|\, d(x_0, H)$ car $\dfrac{-y_n}{\lambda_n} \in H$. Donc, puisque $\|w_n\| \neq 0$, $|\lambda_n| \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$ et $d(x_0, H) \neq 0$ pour $x_0 \notin H$, on a

$$\forall n \geqslant n_0,\quad \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} = \frac{|\lambda_n|\, |h(x_0)|}{\|w_n\|} \leqslant \frac{\lambda_n|\, |h(x_0)|}{|\lambda_n|\, d(x_0, H)} = \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)} .$$

En faisant abstraction de l'erreur d'énoncé signalée plus haut, on a bien $\underline{\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant \dfrac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}}$.

e) En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient $|||\, h\, ||| \leqslant \dfrac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$ donc $d(x_0, H) \leqslant \dfrac{|h(x_0)|}{|||\, h\, |||}$ et on a obtenu l'inégalité inverse au [**c**] donc $\underline{d(x_0, H) = \dfrac{|h(x_0)|}{|||\, h\, |||}}$.

2) a) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\dfrac{u_n}{2^{n+1}}\right| \leqslant \dfrac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ et cette série majorante converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $\underline{\left(\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}}$ est absolument convergente .

b) D'après [**a**], h est bien définie. Pour tout $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$h(u + \lambda v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n + \lambda v_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{2^{n+1}} = h(u) + \lambda h(v)$$

car toutes les séries convergent. Donc $h \in E^*$. D'autre part, l'inégalité vue au [**a**] donne

$$\forall u \in E, \quad |h(u)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{u_n}{2^{n+1}}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}} = \|u\|_\infty \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \|u\|_\infty$$

ce qui montre la continuité de h. De plus, $\forall u \neq 0$, $\dfrac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} \leqslant 1$ donc, en prenant la borne supérieure, $|||\,h\,||| \leqslant 1$. Donc h est une forme linéaire continue et $|||\,h\,||| \leqslant 1$.

c) $\diamond$ On a clairement $v_p \in E$ et $\|v_p\|_\infty = 1$. Or

$$h(v_p) = \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^{p+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}} > 0$$

donc $\dfrac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} = 1 - \dfrac{1}{2^{p+1}}$ et donc $\dfrac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$.

$\diamond$ On a $\dfrac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \leqslant |||\,h\,||| \leqslant 1$ donc $|||\,h\,||| = 1$.

d) Supposons qu'il existe $u \neq 0_E$ tel que $\dfrac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} = |||\,h\,||| = 1$ on a donc $|h(u)| = \|u\|_\infty$ et toutes les inégalités du [**b**] sont des égalités. En particulier, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{|u_n|}{2^{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\|u\|_\infty - |u_n|}{2^{n+1}} = 0$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\|u\|_\infty - |u_n|}{2^{n+1}} \geqslant 0$ donc on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = \|u\|_\infty$. Mais alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|u\|_\infty \neq 0$ en contradiction avec le fait que $u \in E$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.

Donc il n'existe pas de $u \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\dfrac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} = |||\,h\,|||$.

e) Il suffit d'utiliser le résultat du [**II.a**]: puisque h est continue, $H = \operatorname{Ker} h$ est fermé .

f) Soit $x_0 \notin H$, si $d(x_0, H)$ était atteinte alors $\exists\, z_0 \in H$, $d(x_0, H) = \|x_0 - z_0\|$. Or, selon [**1.e**], $d(x_0, H) = \dfrac{|h(x_0)|}{|||\,h\,|||}$ donc $\|x_0 - z_0\| = \dfrac{|h(x_0)|}{|||\,h\,|||} = \dfrac{|h(x_0) - h(z_0)|}{|||\,h\,|||}$ et donc, puisque $x_0 - z_0 \neq 0_E$, $\dfrac{|h(x_0 - z_0)|}{\|x_0 - z_0\|} = |||\,h\,|||$ ce qui est impossible vu [**d**]. Donc pour $x \notin H$, $d(x, H)$ n'est jamais atteinte .

* * *
* *
*